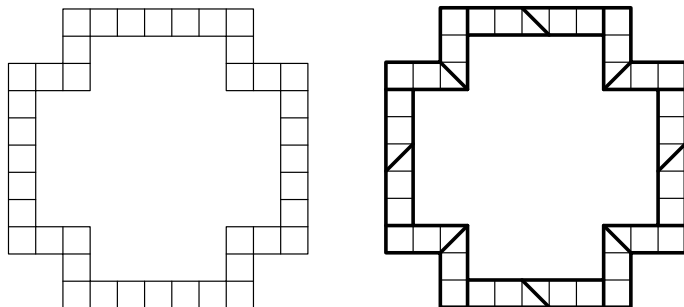


## 6 класс

**Задача 1.** Разрежьте рамку (см. рис.) на 16 равных частей.

[4 балла] (А. В. Шаповалов)



**Ответ.** Можно разрезать так (см. рис. справа).

**Задача 2.** Пазл Пете понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска? [5 баллов] (А. В. Шаповалов)

**Ответ.** За час.

**Решение 1.** Каждое склеивание уменьшает на 1 количество кусков на столе. Раз после 120 склеиваний получился один кусок (целый пазл), то до начала работы был 121 кусок. Теперь если за минуту склеивать по три куска (т. е. уменьшать количество кусков на 2), то один кусок останется через 60 минут.

**Решение 2.** За минуту Петя делал одно склеивание и на сбор пазла потратил 2 часа. Если бы он склеивал по три куска, он делал бы два склеивания за минуту, т. е. работал бы вдвое быстрее и потратил бы, стало быть, 1 час.

*Комментарий.* Время, затраченное на склеивание всего пазла, не зависит от того, в каком порядке Петя брал кусочки. Он мог, например, добавлять по одному кусочки к уже склеенной части. А мог вместо этого склеить кусочки по парам или тройками, а потом склеивать их между собой. Все равно в первом случае у него ушло бы 2 часа, а во втором — 1 час. В первом решении этот факт доказан с помощью подсчета общего числа кусочков. А во втором решении принимается за очевидный. Поэтому, строго говоря, второе решение неполно: в нем получен верный ответ, но не доказана его единственность.

**Задача 3.** Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

[5 баллов] (И. В. Раскина)

**Ответ.** 1001.

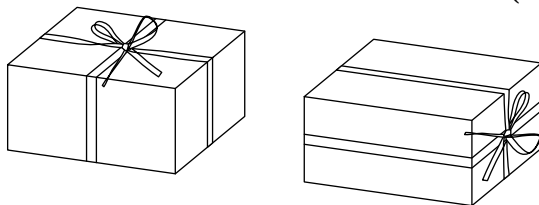
**Решение.** Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. Поскольку в часе, очевидно, более одной минуты, в часе получается 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся. Тогда в сутках  $77 : 7 = 11$  часов и  $11 \cdot 91 = 1001$  секунда.

*Комментарий.* То же решение можно изложить алгебраически. А именно, пусть в сутках  $a > 1$  часов, в часе  $b > 1$  минут, в минуте  $c > 1$  секунд. Тогда  $77 = ab$ ,  $91 = bc$ . С другой стороны,  $77 = 7 \cdot 11$  и  $91 = 7 \cdot 13$ , причем числа 7, 11, 13 простые, т. е. дальше на множители разложить нельзя. Значит,  $b = 7$ , откуда  $a = 11$ ,  $c = 13$ . Всего секунд в сутках получается  $abc = 1001$ .

**Задача 4.** Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на рисунке слева). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.

[6 баллов]

(И. В. Раскина)



**Ответ.** 22 см × 22 см × 11 см.

**Решение.** При первом способе завязывания лента охватывает дважды длину, дважды ширину и четыре раза высоту коробки, т. е. её длина равна шести сторонам основания плюс бантик. При втором способе завязывания лента охватывает дважды длину, четырежды ширину и два раза высоту коробки, т. е. её длина

равна семи сторонам основания плюс бантик. Теперь понятно, что разница в длинах лент  $178 - 156 = 22$  см в точности равна стороне основания коробки. Итак, размеры коробки  $22 \text{ см} \times 22 \text{ см} \times 11 \text{ см}$ . Проверим: в первом случае на обхватывание коробки уходит  $22 \times 6 = 132$  см, 24 см идёт на бантик. Во втором —  $22 \times 7 = 154$  см и те же 24 см на бантик.

**Задача 5.** Замените в равенстве

$$\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \dots + \text{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

[8 баллов]

(И. В. Раскина)

**Ответ.** Максимальное количество «кусков» равно семи, например:  $\text{ПИРОГ} = 95207$ ,  $\text{КУСОК} = 13601$ .

**Решение.** Пример для семи «кусков» приведён выше. Покажем, что больше семи «кусков» быть не может. Для этого удобно условие переписать как пример на умножение  $\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} \cdot n$ , где  $n$  — количество «кусков».

Понятно, что если «кусков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000, так что решений не будет.

Невозможно решение и для девяти «кусков». Для того чтобы число  $\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} \cdot 9$  было пятизначным, надо, чтобы  $K$  равнялось 1. Но тогда  $\text{ПИРОГ}$  и начинается, и кончается на девятку, а этого быть не должно.

Теперь докажем, что и восьми «кусков» быть не может. Пусть  $\text{КУСОК} \cdot 8 = \text{ПИРОГ}$ . Так как в слове  $\text{ПИРОГ}$  все цифры разные, то  $\text{ПИРОГ} \leq 98765$ , а тогда  $\text{КУСОК} \leq 98765/8 = 12345,675$ , то есть  $\text{КУСОК} \leq 12345$ . Тогда понятно, что  $K = 1$  и  $G = 8$ . Буква  $O$  обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на неё же. Легко убедиться, что это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а  $U \leq 2$  и  $C \leq 3$ , то  $U = 2$  и  $C = 3$ . Итак, есть только одна возможность:  $\text{КУСОК} = 12301$ . Но это число не подходит, так как  $12301 \cdot 8 = 98408$ , а в 98408 цифры повторяются, чего не должно быть.

Приведённый пример для семи «кусков» не единственный, есть ещё три:  $14051 \cdot 7 = 98357$ ,  $12351 \cdot 7 = 86457$ ,  $12051 \cdot 7 = 84357$ . Разумеется, достаточно было привести один пример.

**Задача 6.** Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

[9 баллов] (А. В. Хачатурян)

**Ответ.** Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

**Решение.** На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «Да», а Попугай «Нет». То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «Нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознается потому, что только он один и сказал «Да».

Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали). Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «нет»), т. е. первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал. У нас осталось две возможности расстановки:

(1): Попугай, Жираф, Лев, Шакал и (2): Попугай, Лев, Жираф, Шакал. Рассмотрим их.

Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса (когда он знал и Жирафа, и Шакала) все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка (2) варианты Попугай, Лев, Жираф, Шакал и Лев, Попугай, Жираф, Шакал действительно не различались бы до последнего вопроса.