LXXII Московская математическая олимпиада

9 класс 15.03.2009

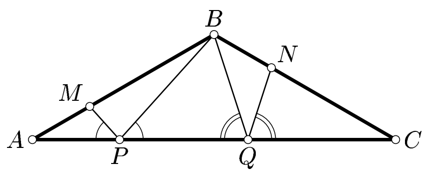
Задача № 1. После урока на доске остался график функции $y = \dfrac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ ($k \neq 0$). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

Задача № 2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

Задача № 3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

Задача № 4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной *интересной* последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?[1]

Задача № 5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рис.). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



Задача № 6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше — выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

[1] Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $(a+b)/2$, а средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$. Последовательность положительных чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен среднему арифметическому (среднему геометрическому) соседних с ним членов, является арифметической (геометрической) прогрессией.

LXXII Московская математическая олимпиада

9 класс 15.03.2009

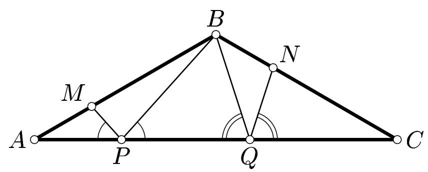
Задача № 1. После урока на доске остался график функции $y = \dfrac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ ($k \neq 0$). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

Задача № 2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

Задача № 3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

Задача № 4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной *интересной* последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?[2]

Задача № 5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рис.). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



Задача № 6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше — выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

Закрытие LXXII Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 4 апреля 2009 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

[2] Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $(a+b)/2$, а средним геометрическим — число $\sqrt{ab}$. Последовательность положительных чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен среднему арифметическому (среднему геометрическому) соседних с ним членов, является арифметической (геометрической) прогрессией.