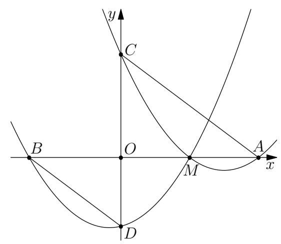
LXXVI Московская математическая олимпиада

10 класс 10.03.2013



Задача № 1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке). Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

Задача № 2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь.

Сколько из них были отважными?

Задача № 3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причём $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Задача № 4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

Задача № 5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n.

Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

Задача № 6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

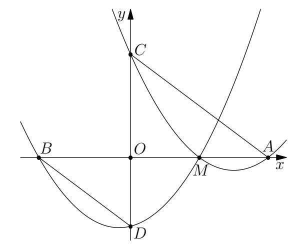
б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/

LXXVI Московская математическая олимпиада

10 класс 10.03.2013



Задача № 1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке). Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

Задача № 2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли ещё 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь.

Сколько из них были отважными?

Задача № 3. Дан правильный $4n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{4n}$ площади S, причём $n > 1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Задача № 4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

Задача № 5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n.

Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?

Задача № 6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

XI устная олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля 2013 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

Закрытие LXXVI Московской математической олимпиады
пройдёт в субботу 31 марта 2013 года в Главном здании МГУ.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo/