Решения задач Первой олимпиады для школьников по теории вероятностей и статистике. 2008 год.

1. Проведите следующий эксперимент 10 раз: подбросьте вначале монету 10 раз подряд и запишите количество выпавших орлов, затем подбросьте монету 9 раз подряд и также запишите количество выпавших орлов. Назовем эксперимент удачным, если в первом случае количество выпавших орлов больше, чем во втором. После проведения серии из 10 таких экспериментов запишите количество удачных и неудачных экспериментов. Собранную статистику оформите в виде таблицы.

а) Ваня бросает монету 3 раза, а Таня — два. Какова вероятность, что у Вани больше орлов, чем у Тани?

б) Ваня бросает монету $n+1$ раз, а Таня — n раз. Какова вероятность, что у Вани больше орлов, чем у Тани?

Решение.

а) Задача является частным случаем более общей задачи пункта б).

Ответ: $\frac{1}{2}$.

б) Пусть Ваня сначала подбросит монету n раз, как и Таня. После этого возникают события:

$$A = \{\textit{у Вани больше орлов}\};\ B = \{\textit{у Тани больше орлов}\};$$
$$C = \{\textit{у Вани и у Тани одинаковое число орлов}\}.$$

Ясно, что $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=1$ и что из-за симметрии (игроков можно поменять местами, и ситуация при этом не изменится) $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$, где $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$ — вероятности соответствующих событий.

Пусть теперь Ваня подбросит монету в последний, $(n+1)$-ый раз. Если ранее произошли события A или B, исход последнего бросания на конечный результат не повлияет: если A, то Ваня выиграет, если B — не выиграет. У Вани окажется больше гербов в случае C, если в $(n+1)$-ом бросании выпадет герб (вероятность этого события равна $\frac{1}{2}$). Следовательно, вероятность выигрыша для Вани равна:

$$\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. В школьном футбольном турнире участвуют 8 команд, одинаково хорошо играющих в футбол. Каждая игра заканчивается победой одной из команд. Случайно выбираемый по жребию номер определяет положение команды в турнирной таблице:

Какова вероятность того, что команды «А» и «В»:

а) встретятся в полуфинале;

б) встретятся в финале.

Решение.

а) Для того, чтобы встретиться в полуфинале, команды должны попасть в разные, но сходящиеся к одному полуфиналу, подгруппы (Событие X).

Замечание: На чертеже одну подгруппу составляют позиции “1” и “2”, “3” и “4” и т.д.

Команда «А» может попасть в любую подгруппу. Чтобы команда «В» могла встретиться с «А» в полуфинале, она должна попасть в смежную подгруппу. Вероятность этого $\frac{2}{7}$.

Затем и «А», и «В» должны выиграть свои встречи (Событие Y). Вероятность этого $\frac{1}{4}$.

Так как команды одинаково хорошо играют в футбол, то вероятность выигрыша в подгруппе равна $\frac{1}{2}$, и выигрыши команд «А» и «В» независимые события, значит, $\mathrm{P}(Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Поскольку события X и Y независимы,

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{команды A и B встретятся в полуфинале}\right\}\right) =$$

$$= \mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{14}.$$

Ответ: $\frac{1}{14}$.

б) Для того, чтобы встретиться в финале, команде «B» необходимо попасть в ту половину таблицы, в которую не попала команда «A». Соответственно, $\mathrm{P}(X) = \frac{4}{7}$.

Кроме того, каждой команде необходимо выиграть по два матча.

$$\mathrm{P}(Y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

В итоге:

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{команды A и B встретятся в финале}\right\}\right) =$$

$$= \mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y) = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{28}.$$

Ответ: $\frac{1}{28}$.

3. Иван Семёнов выполняет тест ЕГЭ по математике. Экзамен состоит из заданий трех типов: A, B и C. К каждому из заданий типа A даны на выбор четыре варианта ответа, только один из которых верный. Всего таких заданий 10. Задания типа B и C требуют развернутого ответа. Так как Ваня постоянно прогуливал, его познания в математике неглубоки. Задания типа A он выполняет, выбирая ответы наугад. Первое из заданий типа B Ваня решает с вероятностью $\frac{1}{3}$. Больше ничего Иван сделать не может. За правильный ответ на одно задание типа A ставится 1 балл, за задание типа B — 2 балла. С какой вероятностью Ваня наберёт больше 5 баллов?
Возьмите задания типа A из пробного варианта ЕГЭ 2008 года. (http://ege.edu.ru/demo/math.zip) и проведите 10 раз эксперимент по случайному выбору ответов. Сравните результат с полученным теоретически (для 5 правильных ответов). Убедитесь, что результаты не сильно отличаются.

Решение.

Событие $A_{2n} = \left\{\textit{Иван Семёнов получает n баллов или больше}\right\}$.

Событие $B = \left\{\textit{он решает задачу типа B}\right\}$.

Тогда $\mathrm{P}\left(\left\{\textit{получил больше 5 баллов}\right\}\right) = \mathrm{P}(A_4)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_6)\mathrm{P}(\overline{B})$.

Очевидно, что вероятность правильно угадать одно из 4 решений — это $\frac{1}{4}$. По закону распределения Бернулли $\mathrm{P}\left(A_{=i}\right)=C_n^i p^i\left(1-p\right)^{n-i}$, тогда

$$\mathrm{P}\left(A_4\right)=\sum_{i=4}^{10} C_{10}^i\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}=0,224124908;$$

$$\mathrm{P}\left(A_6\right)=\sum_{i=6}^{10} C_{10}^i\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}=0,019727707.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{получил больше 5 баллов}\right\}\right)=0,224124908\cdot\frac{1}{3}+0,019727707\cdot\frac{2}{3}=$$
$$=0,087860107\approx 0,088.$$

Ответ: $\approx 0,088$.

04. Город считается миллионером, если в нем живет более миллиона человек. Вероятность какого события больше:

$$A=\left\{\textit{наугад выбранный городской житель живет в городе}-\textit{миллионере}\right\}$$

или

$$B=\left\{\textit{наугад выбранный город — город}-\textit{миллионер}\right\}?$$

Ответ обоснуйте.

Возьмите статистику численности городского населения России с сайта http://www.perepis2002.ru/ct/doc/1_TOM_01_05.xls. Проверьте, справедлив ли для России ваш вывод, сделанный в ранее. Для этого подсчитайте вероятность того, что наугад выбранный городской житель живет в городе-миллионере, и вероятность того, наугад выбранный город – миллионер, и сравните их.

Решение.

Пусть M — количество городов-миллионеров, N — количество городов не миллионеров, m и n — среднее количество населения в городах 1-ого и 2-ого типов соответственно, тогда вероятности равны:

$$\mathrm{P}\left(A\right)=\frac{mM}{mM+nN};\ \mathrm{P}\left(B\right)=\frac{M}{M+N}.$$

Видно, что $\dfrac{mM}{mM+nN}=\dfrac{M}{M+\frac{n}{m}N}$.

Заметим, что $m>10^6$ и $n\le 10^6$ (т.к. если $m\le 10^6$, то среди городов-миллионеров найдется город с населением не превышающим миллион, что противоречит определению города-миллионера, для n аналогично). Следовательно, $\frac{n}{m}<1$. Тогда очевидно: $\frac{M}{M+\frac{n}{m}N}>\frac{M}{M+N}$.

Ответ: вероятность того, что наугад выбранный городской житель живет в городе-миллионере, больше вероятности того, что наугад выбранный город-миллионер.

05. Итоговый балл в фигурном катании выставляется следующим образом. Бригада судей состоит из десяти человек. Каждый из судей ставит спортсмену свою оценку за выступление. После этого из десяти полученных оценок случайным образом выбираются семь. Сумма этих семи оценок и есть итоговый балл. Места между спортсменами распределяются в соответствии с набранным итоговым баллом: чем выше балл, тем лучше результат.
В чемпионате участвовало 6 спортсменов. Могло ли оказаться так, что:

а) спортсмен, у которого сумма всех 10 оценок максимальна, занял последнее место?

б) спортсмен, у которого сумма всех 10 оценок максимальна, занял последнее место, а спортсмен, у которого сумма всех 10 оценок минимальна, занял первое место?

Решение.
а) частный случай пункта б).
Ответ: Да, могло.

б) Приведем пример, в котором такая ситуация возможна.

Спортсмен	Оценки										Сумма 10 оценок	Сумма 7 оценок
1	1	1	1	1	1	1	1	6	6	6	25	7
2	1	1	1	1	1	1	2	5	5	5	23	8
3	1	1	1	1	1	1	3	4	4	4	21	9
4	1	1	1	1	1	1	4	3	3	3	19	10
5	1	1	1	1	1	1	5	2	2	2	17	11
6	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	15	12

При таком голосовании, в случае, если учитываются оценки только первых 7 судей, 1-ый спортсмен займет последнее место, при этом сумма всех 10-ти оценок у него наибольшая. В то же время, 6-ой спортсмен займет первое место, и сумма всех 10-ти оценок наименьшая.

Ответ: Да, могло.

06. Можно ли:

а) нагрузить две монеты так, чтобы вероятности выпадения «орла» и «решки» были разные, а вероятности выпадения любой из комбинаций «решка, решка», «орел, решка», «орел, орел» были бы одинаковы?

б) нагрузить две кости так, чтобы вероятность выпадения любой суммы от 2 до 12 была одинаковой?

Решение.

а) Покажем, что так нагрузить монеты невозможно. Сразу заметим, что если обе монеты симметричны, то выпадение комбинации «орел, решка» более вероятно, чем выпадение остальных комбинаций. Теперь без ограничения общности можно считать, что у первой монеты вероятность выпадения «орла» больше. Рассмотрим все возможные случаи:

1) У второй монеты вероятность выпадения «орла» не меньше, чем вероятность выпадения «решки». Тогда легко видеть, что при бросании двух монет вероятность выпадения комбинации «орел, орел» больше, чем вероятность выпадения комбинации «решка, решка».

2) У второй монеты вероятность выпадения «решки» больше, чем вероятность выпадения «орла». Тогда вероятность выпадения комбинации «орел, решка» не меньше вероятности выпадения на первой монете «орла», а на второй — «решки», что в свою очередь больше вероятности выпадения комбинации «решка, решка».

Таким образом, утверждение полностью доказано.

Ответ: Нет, нельзя.

б) (Приводим Решение участника олимпиады, Ноздрина Ивана.)

Покажем, что так нагрузить кости невозможно. Докажем от противного. Предположим, что нам удалось нагрузить две кости так, что вероятность выпадения любой суммы от 2 до 12 одинакова. Пусть вероятность выпадения «i» на первой кости равна P_i, а на второй кости Q_i. Заметим, что единственный способ получить при бросании сумму 2 — это выбросить «1» и «1», а единственный способ получить 12 — выбросить «6» и «6». Значит, вероятность выпадения двух единиц равна вероятности выпадения двух шестерок. Таким образом, $P_1Q_1 = P_6Q_6 \neq 0$. Последнее неравенство следует из того, что вероятности всех сумм равны между собой по условию, и сумма этих вероятностей равна 1. Также заметим, что вероятность получения суммы 7 не меньше, чем вероятность события

$$A = \{\textit{на одной из костей выпало } "1", \textit{ а на другой — } "6"\}.$$

Поскольку вероятность события A равна $P_1Q_6 + P_6Q_1$, и вероятность получения суммы 7 равна вероятности получения суммы 2 по условию, то $P_1Q_1 \geq P_1Q_6 + P_6Q_1$.

Можем поделить обе части на P_1Q_1, так как по сделанному замечанию это произведение не равно нулю. Таким образом, имеем $1 \geq \frac{Q_6}{Q_1} + \frac{P_6}{P_1}$. Из соотношений $P_1Q_1 = P_6Q_6$ получаем, что $\frac{P_6}{P_1} = \frac{Q_1}{Q_6}$. Тогда, сделав замену в неравенстве $1 \geq \frac{Q_6}{Q_1} + \frac{P_6}{P_1}$, получим:

$$1 \geq \frac{P_1}{P_6} + \frac{P_6}{P_1} \Leftrightarrow P_1^2 - P_1P_6 + P_6^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(P_1 - P_6\right)^2 + P_1P_6 \leq 0.$$

Но тогда отсюда следует, что $P_1P_6 = 0$, а значит, $P_1 = 0$ или $P_6 = 0$. Противоречие, так как ранее было показано, что $P_1Q_1 = P_6Q_6 \neq 0$. Утверждение полностью доказано.

Ответ: Нет, нельзя.

07. Петя играет в компьютерную игру «Куча камней». Сначала в куче 16 камней. Игроки по очереди берут из кучи 1, 2, 3 или 4 камня. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Петя играет впервые и поэтому каждый раз берет случайное число камней, при этом он не нарушает правила игры. Компьютер играет по следующему алгоритму: на каждом ходу он берет столько камней, чтобы оказаться в наиболее выгодном положении. Игру начинает всегда Петя. С какой вероятностью Петя выиграет?

Решение.

Заметим, что игрок, делающий первый ход, всегда имеет преимущество и выигрывает при правильной стратегии. Действительно, на первом шаге нужно взять один камень из кучи, а на каждом последующем шаге брать такое количество камней, чтобы число оставшихся камней делилось на 5. Поскольку согласно правилам игры на каждом шаге разрешено брать 1, 2, 3 или 4 камня, то такая стратегия всегда осуществима.

В то же время, если на каком-то из шагов игрок, делающий первый ход, отступит от этой стратегии, то его соперник имеет возможность выиграть игру, воспользовавшись той же стратегией. Заметим также, что если в игре побеждает игрок, делающий первый ход, то он обязательно делает за игру 4 хода.

Таким образом, у Пети на каждом ходу есть только одна возможность не проиграть: если он возьмет 1 камень на первом ходу, оставит компьютеру ровно 10 камней на втором ходу и ровно 5 камней на третьем.

После каждого Петиного хода компьютер, чтобы минимизировать вероятность своего проигрыша, должен взять 1 камень. Тогда Петя выигрывает, только если будет брать 4 камня из четырех оставшихся до делимости на 5.

Таким образом, вероятность выигрыша Пети равна $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$, где $\frac{1}{4}$ — вероятность того, что в свой ход Петя возьмет правильное количество камней.

Ответ: $\frac{1}{256}$.

08. Петя предлагает Васе сыграть в следующую игру. Петя дает Васе две коробки с конфетами. В каждой из двух коробок шоколадные конфеты и карамельки. Всего в обеих коробках 25 конфет. Петя предлагает Васе взять из каждой коробки по конфете. Если обе конфеты окажутся шоколадными, то Вася выиграл. В противном случае выиграл Петя. Вероятность того, что Васе достанутся две карамельки, равна $0{,}54$. У кого больше шансов на победу?

Решение.

Поскольку Вася вынет две карамельки с вероятностью $0{,}54$, то вероятность того, что он вынет две шоколадные конфеты, заведомо не превосходит $1-0{,}54=0{,}46$, т.е. вероятность выигрыша для Васи меньше $\frac{1}{2}$. Значит, больше шансов на победу у Пети.

Ответ: У Пети.

09. На каждой из четырех карточек написано натуральное число. Берут наугад две карточки и складывают числа на них. С равной вероятностью эта сумма может быть меньше 9, равна 9 и больше 9. Какие числа могут быть записаны на карточках?

Решение.

Пусть на четырех карточках написаны натуральные числа a, b, c, d. Две из четырёх карточек можно выбрать шестью различными способами. Поскольку по условию пару карточек выбирают случайным образом, то вероятность выбрать конкретную пару равна $\frac{1}{6}$. Далее, так как по условию события $\{s<9\}$, $\{s=9\}$, $\{s>9\}$ (где s – сумма чисел на выбранных карточках) равновероятны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{3}$.

Значит, записав все возможные суммы (а это $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$), мы можем заключить, что две из этих сумм равны 9, две больше 9 и две меньше (поскольку каждую из них можно получить с вероятностью $\frac{1}{6}$).

Рассмотрим те суммы, которые равны 9. Здесь возможны два случая:

(1) либо в каждой из этих (двух) сумм одно из слагаемых взято с одной и той же карточки;

(2) либо же все слагаемые взяты с разных карточек.

Рассмотрим первый случай. Пусть, для определенности, суммы, равные 9, — это $a+b=a+c=9$. Тогда это означает, что на карточках написаны числа a, $9-a$, $9-a$, d, а возможные суммы равны 9, 9, $a+d$, $18-2a$, $9-a+d$, $9-a+d$. Тогда, если предположить, что $a<d$, то две последние суммы больше 9, а значит, две средние должны быть меньше 9. Но из $18-2a<9$ получаем, что $9<2a$, а из $a<d$ и $a+d<9$, что $2a<9$, т.е. получим противоречащие друг другу неравенства; к ним нас привело предположение, что $a<d$, значит, это предположение неверно. Если же предположить, что $a>d$, то также справедливы только что проведенные рассуждения, если предварительно во всех неравенствах поменять знак < на >. Таким образом, первый случай невозможен.

Теперь рассмотрим второй случай. Для определенности, положим $a+c=b+d=9$, следовательно, на карточках написано a, b, $9-a$, $9-b$, а возможные суммы $a+b$, 9, $9-b+a$, $9-a+b$, 9, $18-a-b$. Как мы видим из выписанных сумм, необходимыми и достаточными условиями для выполнения требований задачи являются $a\neq b$ и $a+b\neq 9$. Из первого условия следует, что в третьей и четвертой суммах одно слагаемое больше 9, а другое меньше, из второго условия получаем тоже самое для первой и последней сумм. Невыполнение же любого из условий будет означать, что более двух сумм равны 9.

Итак, по набору условий $0<a<9$, $0<b<9$ (все числа натуральные), $a\neq b$ и $a+b\neq 9$, выпишем все возможные комбинации чисел на карточках (без учета перестановок). Они и будут ответом.

Ответ: $(1;2;7;8)$; $(1;3;6;8)$; $(1;4;5;8)$; $(2;3;6;7)$; $(2;4;5;7)$; $(3;4;5;6)$.

10. Имеются два симметричных кубика. Можно ли так написать на их гранях некоторые числа, чтобы сумма очков при бросании принимала значения 1, 2, ... ,36 с равными вероятностями?

Решение.

Приведем пример таких кубиков. Пусть на первом кубике написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а на втором 0, 6, 12, 18, 24, 30. Заметим, что любое число от 1 до 36 представимо единственным образом в виде суммы чисел, написанных на двух кубиках. Таким образом, сумма очков при бросании принимает значения 1, 2, …, 36 с равными вероятностями.

Ответ: Да, можно.

11. В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна $\frac{3}{25}$. Сколько в классе девочек?

Решение.

Пусть в классе n мальчиков, тогда число способов выбрать из них двух дежурных равно $\frac{n(n-1)}{2}$, число способов выбрать двух дежурных из всего классе равно $\frac{25\cdot 24}{2}$. Поэтому вероятность того, что будут выбраны два мальчика, равна отношению двух полученных дробей, т.е. $\frac{n(n-1)}{25\cdot 24}$. Она же по условию равна $\frac{3}{25}$. Получаем квадратное уравнение $n^2-n-72=0$. Его корни -8 и 9. Нам подходит только положительный корень, т.е. в классе 9 мальчиков, и, следовательно, 16 девочек.

Ответ: 16.

12. В первой четверти у Васи было 5 оценок по математике, больше всего среди них пятерок. При этом оказалось, что медиана всех оценок равна 4, а среднее арифметическое $3{,}8$. Какие оценки могли быть у Васи?

Решение.

Выпишем оценки Васи по возрастанию. На третьем (среднем) месте будет стоять 4. Значит, двумя оценками, стоящими правее неё могут быть только (4, 4), (4, 5) либо (5, 5). Первые два варианта не подходят, т.к. тогда четверок будет больше, чем пятерок, что противоречит условию. Значит, последние две оценки — пятерки.

Т.к. среднее всех оценок равно $3{,}8$, то сумма всех пяти оценок равна $3{,}8\cdot 5=19$. Значит, первые две оценки (стоящие левее четверки) в сумме дают $19-5-5-4=5$. Значит, ими могут быть только (1, 4) или (2, 3). Первый вариант невозможен, т.к. иначе у Васи было бы поровну четверок и пятерок. Значит, Васины оценки (2, 3, 4, 5, 5).

Ответ: (2, 3, 4, 5, 5).

13. В классе меньше 30 человек. Вероятность того, что наугад выбранная девочка отличница, равна $\frac{3}{13}$, а вероятность того, что наугад выбранный мальчик отличник, равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

Решение.

В соответствии с классической теорией вероятностей, вероятность того, что наугад выбранная девочка — отличница, равна отношению количества девочек отличниц к общему количеству девочек в классе. Соответственно

$$\frac{3}{13}=\frac{\textit{кол}-\textit{во девочек}-\textit{отличниц}}{\textit{кол}-\textit{во девочек}}$$

Учитывая, что количество девочек — число натуральное, — и что в классе меньше 30 человек (и соответственно меньше 30 девочек), находим, что в классе либо 13 девочек (3 отличницы), либо 26 (6 отличниц).

Применяя те же рассуждения к мальчикам, находим, что:

$$\frac{4}{11}=\frac{\textit{кол}-\textit{во мальчиков}-\textit{отличников}}{\textit{кол}-\textit{во мальчиков}}$$

В классе либо 11 мальчиков (4 отличника), либо 22 (8 отличников). Далее, учитывая, что в классе меньше 30 человек, находим, что в классе 13 девочек (3 отличницы) и 11 мальчиков (4 отличника). Значит, количество отличников $3+4=7$.

Ответ: 7.

14. Аня, Боря и Вася решили пойти на «Ёлку». Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придет. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 15.00 до 16.00. Вася самый терпеливый из всех: если он придет и на остановке не будет ни Ани, ни Бори, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождется, пойдет на «Ёлку» один. Боря менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Аня самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Боря и Вася встретятся, то они будут ждать Аню до 16.00. Какова вероятность того, что на «Ёлку» они пойдут все вместе?

Решение.

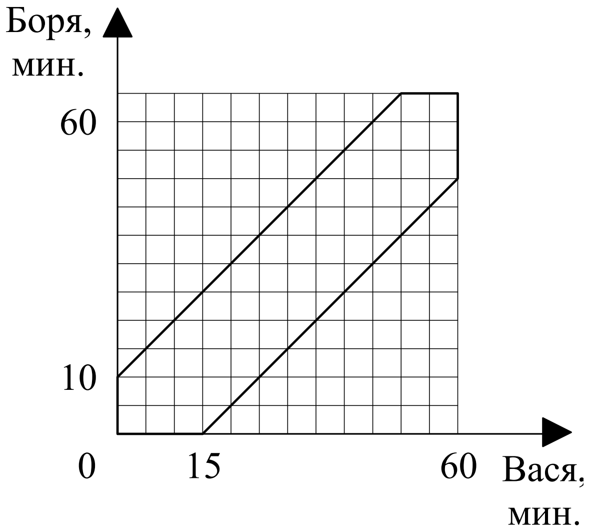
Так как Аня совсем не будет ждать, то ребята все вместе пойдут на «Ёлку» только если Аня придёт последней. Очевидно, что эти события независимые, следовательно

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{все трое пойдут на «Ёлку» вместе}\right\}\right)=$$
$$=\mathrm{P}\left(\left\{\textit{Аня придет последней}\right\}\right)\mathrm{P}\left(\left\{\textit{Боря и Вася встретятся}\right\}\right).$$

Из комбинаторных соображений:

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{Аня придет последней}\right\}\right)=\frac{2\left(\textit{количество подходящих вариантов}\right)}{3!\left(\textit{количество перестановок}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Вторая вероятность находится геометрически (см. рис.):



Фигура, обведенная черным, есть множество тех времен прихода обоих, при которых они встретятся. Вероятность будем считать как отношение времен прихода, которые удовлетворяют условию встречи, к множеству возможных приходов. Т.о. надо разделить площадь выделенной части на площадь квадрата 12×12, если считать площадь по клеткам.

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{Боря и Вася встретятся}\right\}\right)=\frac{12^2-\frac{9^2}{2}-\frac{10^2}{2}}{12^2}\approx 0{,}371527778.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}\left(\left\{\textit{все трое пойдут на «Ёлку» вместе}\right\}\right)\approx$$

$$\approx\frac{0{,}371527778}{3}\approx 0{,}123842593\approx 0{,}124.$$

Ответ: $0{,}124$.

15. Три усталых ковбоя зашли в салун, и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой, и поэтому разобрали три шляпы наугад. Найдите вероятность того, что никто из них не взял свою собственную шляпу.

Решение.

Заметим, что у ковбоев 6 различных вариантов взять шляпы. Действительно, первый ковбой может взять любую из трёх шляп, второй одну из оставшихся двух, а третий возьмет последнюю шляпу.

При этом только в двух вариантах из шести никто из ковбоев не возьмет свою шляпу, поскольку ковбой, который берет шляпу первым, может взять любую из двух шляп других ковбоев. У оставшихся же ковбоев выбора нет, так как шляпа одного из них по-прежнему никем не взята, и значит, он обязательно должен взять другую шляпу.

Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

16. Игральную кость бросают раз за разом. Обозначим P_n вероятность того, что в какой-то момент сумма очков, выпавших при всех сделанных бросках, равна n. Докажите, что при $n \ge 7$ верно равенство $P_n = \frac{P_{n-1}+P_{n-2}+\ldots+P_{n-6}}{6}$.

Доказательство.

Разделим игру на два независимых испытания: первый бросок, который даёт с вероятностью $\frac{1}{6}$ любое число очков k от 1 до 6 и второе испытание — все последующие броски. Все последующие броски — такая же игра, которая даёт в какой-то момент сумму m с вероятностью P_m.

Очевидно, во всей игре сумма очков в какой-то момент станет равна n, если $m=n-k$. Рассмотрим события

$$A_{k,n-k}=\left\{\textit{первый раз выпало } k;\ \textit{сумма остальных в кокой–то момент } n-k\right\}.$$

Поскольку последующие броски не зависят от первого,

$$\mathrm{P}\left(A_{k,n-k}\right)=\frac{1}{6}P_{n-k}.$$

События $A_{1,n-1}$, $A_{2,n-2}$, … и т.д. несовместны, поэтому

$$P_n=\mathrm{P}\left(A_{1,n-1}\cup\ldots\cup A_{6,n-6}\right)=\mathrm{P}\left(A_{1,n-1}\right)+\ldots+\mathrm{P}\left(A_{6,n-6}\right)=\frac{1}{6}P_{n-1}+\ldots+\frac{1}{6}P_{n-6},$$

что и требовалось доказать.

17. На рулетке может выпасть любое число от 0 до 2007 с одинаковой вероятностью. Рулетку крутят раз за разом. Обозначим P_k вероятность того, что в какой-то момент сумма чисел, выпавших при всех сделанных бросках, равна k. Какое число больше: P_{2007} или P_{2008}?

Решение.

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче (отличие в одном — вместо числа 6 — число 2008), найдем:

$$P_n=\frac{1}{2008}\sum_{k=0}^{2007}P_{n-k};\ \frac{2007}{2008}P_n=\frac{1}{2008}\sum_{k=1}^{2007}P_{n-k};\ P_n=\frac{1}{2007}\sum_{k=1}^{2007}P_{n-k}.$$

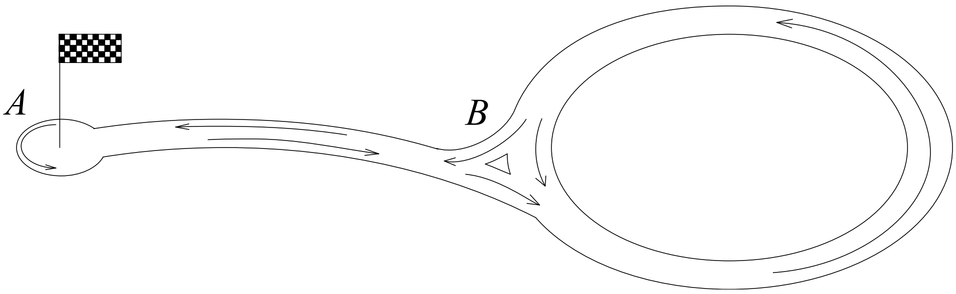
Так как до начала игры сумма с достоверностью равна нулю, то $P_0 = 1$. Тогда

$$P_{2007} - P_{2008} = \frac{1}{2007}\left(P_0 + \ldots P_{2006}\right) - \frac{1}{2007}\left(P_1 + \ldots P_{2007}\right) = \frac{1}{2007}\left(P_0 - P_{2007}\right) > 0,$$

так как $P_{2007} < P_0 = 1$ (сумма 2007, очевидно, может и не случиться). Значит, $P_{2007} > P_{2008}$.

Ответ: P_{2007}.

18. На рисунке изображена схема трассы для картинга. Старт и финиш в точке A, причем картингист по дороге может сколько угодно раз заезжать в точку A и возвращаться на круг.



На путь от A до B или обратно юный гонщик Юра тратит минуту. На путь по кольцу Юра также тратит минуту. По кольцу можно ездить только против часовой стрелки (стрелки показывают возможные направление движения). Юра не поворачивает назад на полпути и не останавливается. Длительность заезда 10 минут. Найдите число возможных различных маршрутов (последовательностей прохождения участков).

Решение.

Обозначим M_n число всевозможных маршрутов длительностью n минут. Каждый такой маршрут состоит ровно из n участков (участок — это отрезок AB, BA или кольцо BB).

Пусть $M_{n,A}$ — число таких маршрутов, оканчивающихся в A, а $M_{n,B}$ — число маршрутов с конечной точкой B.

В точку B за минуту можно попасть как из точки A, так и из точки B, поэтому $M_{n,B} = M_{n-1}$.

В точку A за минуту можно попасть только из точки B, поэтому $M_{n,A} = M_{n-1,B} = M_{n-2}$. Следовательно,

$$M_{n,A} = M_{n-2} = M_{n-2,A} + M_{n-2,B} = M_{n-4} + M_{n-3} = M_{n-2,A} + M_{n-1,A}.$$

Дополнительно заметим, что $M_{1,A} = 0$, $M_{2,A} = 1$. Таким образом, числа $M_{n,A}$ образуют последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Число $M_{10,A}$ равно 34 — девятому числу Фибоначчи[1].

Ответ: 34.

19. По случаю начала зимних каникул все мальчики из 8 «В» пошли в тир. Известно, что в 8 «В» n мальчиков. В тире, куда пришли ребята, n мишеней. Каждый из мальчиков случайным образом выбирает себе мишень, при этом некоторые ребята могли выбрать одну и ту же мишень. После этого все одновременно делают залп по своим мишеням. Известно, что каждый из мальчиков попал в свою мишень. Мишень считается пораженной, если в нее попал хоть один мальчик.

а) Найти среднее количество пораженных мишеней.

б) Может ли среднее количество пораженных мишеней быть меньше $\frac{n}{2}$?

Решение.

а) Обозначим через p вероятность того, что данная мишень поражена. Тогда, в силу симметрии, искомое среднее число пораженных целей равно np. Таким образом, осталось найти p. Заметим, что вероятность того, что данный мальчик поразит данную мишень, равна $\frac{1}{n}$. Следовательно, вероятность того, что данный мальчик не поразит данную мишень, равна $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Поэтому, в силу независимости выстрелов, вероятность того, что ни один мальчик не поразит данную мишень равна $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Значит, вероятность того, что хотя бы один мальчик поразит данную мишень, равна $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. А это и есть вероятность p. Таким образом, среднее количество пораженных мишеней равно $p\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Ответ: $p\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$**.**

б) Покажем, что среднее количество пораженных мишеней всегда больше $\frac{n}{2}$. Для этого достаточно показать, что:

[1] Последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, где каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, называется последовательностью Фибоначчи по имени итальянского математика Леонардо Фибоначчи из Пизы, который опубликовал исследование этой последовательности в 1202 году.

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{2};\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Мы докажем это неравенство, воспользовавшись тем, что последовательность $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.[2]

Для того, чтобы доказать, что последовательность a_n монотонно возрастает, достаточно доказать, что последовательность $b_n = \frac{1}{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ монотонно убывает.

Теперь заметим, что $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. Таким образом, имеем:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \ge \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Первое нестрогое неравенство в цепочке следует из известного неравенства Бернулли: $(1+a)^n \ge 1+na$ при $n\in\mathbb{N}$ и $a>-1$. Значит, последовательность a_n монотонно возрастает.

Теперь покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$. Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Последнее, что осталось доказать, это неравенство $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, которое следует из того, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} > 2{,}7$. Утверждение полностью доказано.

Ответ: не может**.**

---

[2] Иррациональное число $e = 2{,}718281828459\ldots$ – основание натурального логарифма. График функции логарифма по этому основанию пересекает ось абсцисс под углом $45°$. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ является одним из замечательных и широко известных фактов.