Решения задач Второй олимпиады для школьников по теории вероятностей и статистике. 2009 год.

1. (1б, 7–9) А и Б стреляют в тире, но у них есть только один шестизарядный револьвер с одним патроном. Поэтому они договорились по очереди случайным образом крутить барабан и стрелять. Начинает А. Найдите вероятность того, что выстрел произойдет, когда револьвер будет у А.

Решение.

Выстрел происходит на нечётной попытке (когда револьвер у А), в остальные попытки выстрела не происходит. Следовательно, искомая вероятность есть сумма

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^2+\ldots=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}.$$

Ответ: $\frac{6}{11}$.

2. (9–11) Коля и Женя договорились встретиться в метро в первом часу дня. Коля приходит на место встречи между полуднем и часом дня, ждет 10 минут и уходит. Женя поступает точно так же.

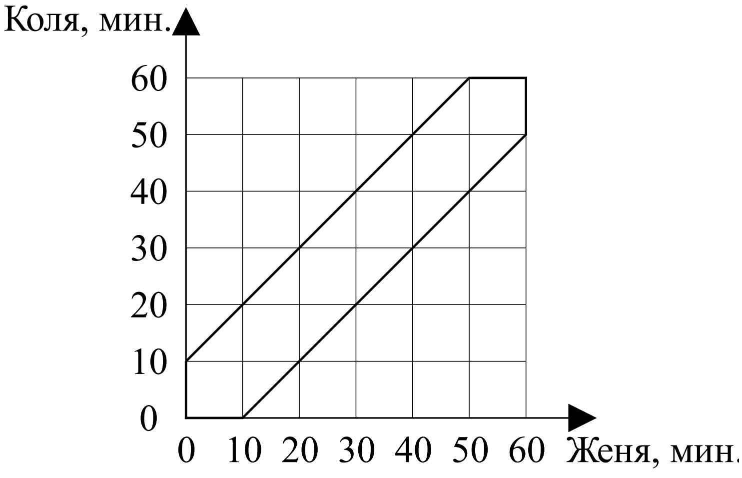
а) **(1б)** Какова вероятность того, что они встретятся?

б) **(1б)** Как изменится вероятность встречи, если Женя решит прийти раньше половины первого? а Коля по-прежнему — между полуднем и часом?

в) **(2б)** Как изменится вероятность встречи, если Жени решит прийти в произвольное время с 12.00 до 12.50, а Коля по-прежнему между 12.00 и 13.00?

Решение.

а) Изобразим графически времена прихода. Время прихода Жени будем откладывать по оси X, а время прихода Коли по оси Y.

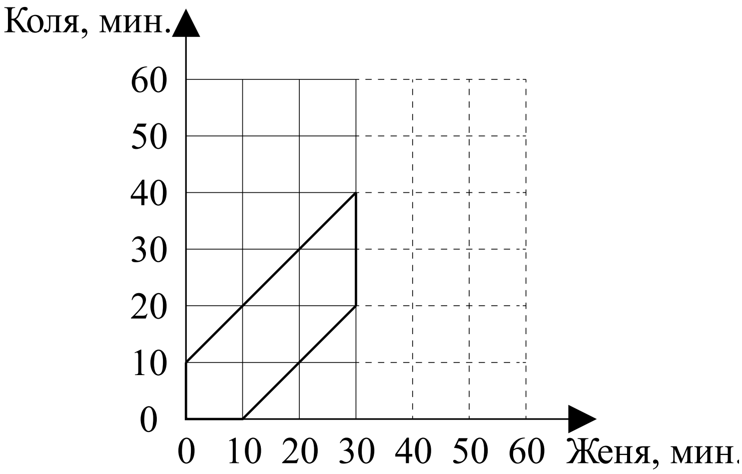


Фигура, обведенная черным, есть множество тех времен прихода обоих, при которых они встретятся. Вероятность будем считать как отношение времен прихода, которые удовлетворяют условию встречи, к множеству возможных приходов. Т.о.

надо разделить площадь выделенной части на площадь квадрата 6×6, если считать площадь по клеткам.

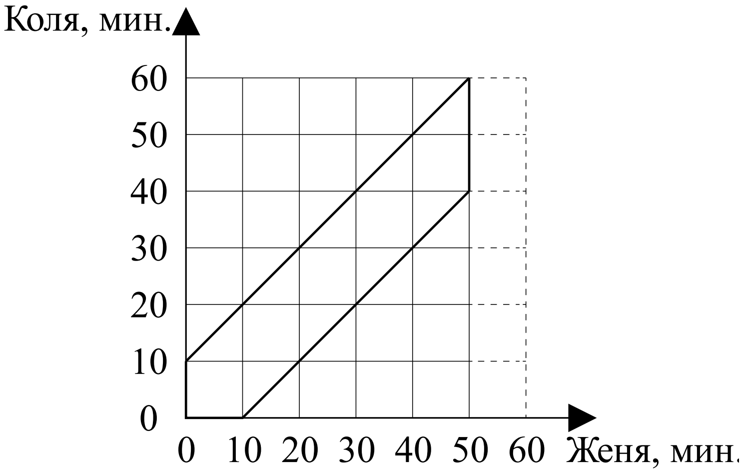
Ответ: $\dfrac{11}{36}$.

б) Изобразим графически времена прихода, как в пункте а). Однако в этом случае возможное время прихода Жени будет находиться в интервале от 0 до 30 мин. Площадь выделенной фигуры относится к площади всей фигуры 6×3 как $\dfrac{5,5}{18}=\dfrac{11}{36}$. Т.о. вероятность осталась неизменной.



Ответ: $\dfrac{11}{36}$.

в)



$$\frac{9,5}{30}=\frac{19}{60}>\frac{11}{36}.$$

Ответ: $\dfrac{19}{60}$.

3. (1б, 8–11) Вероятность того, что купленная лампочка будет работать, равна 0,95. Сколько нужно купить лампочек, чтобы с вероятностью 0,99 среди них было не менее 5 работающих?

Решение.

Возьмем 6 лампочек. Вероятность того, что среди них будет не менее 5 работающих, есть сумма вероятностей того, что среди них будет 5 работающих и 1 неработающая и все 6 работающих, т.е.

$$C_6^5 \cdot 0{,}95^5 \cdot 0{,}05 + C_6^6 \cdot 0{,}95^6 = 6 \cdot 0{,}95^5 \cdot 0{,}05 + 0{,}95^6 = 0{,}9672.$$

Возьмем 7 лампочек. Искомая вероятность равна

$$C_7^5 \cdot 0{,}95^5 \cdot 0{,}05^2 + C_7^6 \cdot 0{,}95^6 \cdot 0{,}05 + C_7^7 \cdot 0{,}95^7 =$$
$$= 21 \cdot 0{,}95^5 \cdot 0{,}05^2 + 7 \cdot 0{,}95^6 \cdot 0{,}05 + 0{,}95^7 = 0{,}9962.$$

Минимальное число необходимых лампочек равно 7.

Ответ: 7.

4. (1б, 7-9) У охотника есть две собаки. Однажды, заблудившись в лесу, он вышел на развилку. Охотник знает, что каждая из собак с вероятностью p выберет дорогу домой. Он решил выпустить собак по очереди. Если обе выберут одну и ту же дорогу, он пойдет за ними; если же они разделятся, охотник выберет дорогу, кинув монетку. Увеличит ли таким способом охотник свои шансы выбрать дорогу домой, по сравнению с тем, как если бы у него была одна собака?

Решение.

Вероятность выбрать верный путь, имея одну собаку, равна p. Вероятность выбрать верную дорогу, если действовать указанным способом, имея двух собак, равна:

$$\tilde{p} = p \cdot p + p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} = p \cdot p + 2 \cdot \frac{1}{2} p(1-p) = p,$$

где $p \cdot p$ — вероятность того, что обе собаки выберут правильную дорогу, а $p(1-p)$ и $(1-p)p$ — вероятности того, что только одна из собак выбрала верную дорогу. Получаем, что вероятности в двух случаях равны $\tilde{p} = p$.

Ответ: не увеличит.

5. (1б, 7–9) При изучении иностранного языка класс делится на две группы. Ниже даны списки групп и полугодовые оценки учащегося. Может ли учительница английского языка перевести одного ученика из первой группы во вторую так, чтобы средний балл учащихся в обеих группах вырос?

	1 группа	Отметка	2 группа	Отметка
1.	Андреев	5	Алексеева	3
2.	Борисова	3	Богданов	4
3.	Васильева	5	Владимиров	5
4.	Георгиев	3	Григорьева	2
5.	Дмитриев	5	Давыдова	3
6.	Евстигнеева	4	Евстахиев	2
7.	Игнатов	3	Ильина	5
8.	Кондратьев	4	Климова	4
9.	Леонтьева	3	Лаврентьев	5
10.	Миронов	4	Михайлова	3

11.	Николаева	5		
12.	Остапов	5		

Решение.

Следует перевести человека с оценкой 4, так как 4 меньше среднего в первой группе, и больше среднего во второй.

Ответ: может.

6. (2б, 7–11) Маркетинговая компания решила провести социологическое исследование, чтобы узнать, какая часть городского населения узнает новости в основном из радиопередач, какая часть — из телепрограмм, какая часть — из прессы, а какая — по интернету. Для исследования было решено использовать выборку из 2000 случайно выбранных владельцев адресов электронной почты. Можно ли считать такую выборку репрезентативной? Обоснуйте свою точку зрения.

Решение.

Выборка нерепрезентативна, так как два события:

$$A = \{\textit{у данного человека есть электронная почта}\}$$

и

$$B = \{\textit{данный человек пользуется Интернетом}\}$$

являются зависимыми. С другой стороны, люди, пользующиеся Интернетом, в большинстве своём используют его в частности и для чтения новостей. Т.о. процент людей, которые скажут, что узнают новости из Интернета, в данной выборке будет заметно больше, чем среди всех людей.

Ответ: нельзя.

7. (2б, 8–11) В ящике 2009 носков — синих и красных. Может ли синих носков быть столько, чтобы вероятность вытащить наудачу два носка одного цвета была равна $0{,}5$?

Решение.

Пусть в ящике $n+m$ носков, из которых n одного цвета и m другого. Тогда вероятность вытащить два носка одного цвета равна сумме вероятностей $\mathrm{P}_{11}+\mathrm{P}_{22}$ вытащить два носка первого и второго цветов.

$$\mathrm{P}_{11} = \frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1};\ \mathrm{P}_{22} = \frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1};$$

$$\mathrm{P}_{11}+\mathrm{P}_{22} = \frac{n^2-n+m^2-m}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{1}{2},$$

откуда $2n^2+2m^2-2(n+m) = n^2+2mn+m^2-(n+m)$; $n^2-2mn+m^2 = n+m$; $(n-m)^2 = n+m$.

Из условия следует, что $n+m=2009$. Уравнение $(n-m)^2=2009$ целых решений не имеет.

Ответ: не может.

8. (2б, 8–11) У Аси и Васи есть 3 монеты. На разных сторонах одной монеты изображены ножницы и бумага, на сторонах другой монеты — камень и ножницы, на сторонах третьей — бумага и камень. Ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень и камень побеждает ножницы. Сначала Ася выбирает себе монетку, потом Вася, потом они бросают свои монетки и смотрят, кто выиграл (если выпало одно и то же, то — ничья). Так они делают много раз. Есть ли возможность у Васи выбирать монету так, чтобы вероятность его выигрыша была выше, чем у Аси?

Решение.

Пронумеруем монеты: пусть монета «Ножницы-бумага» имеет номер 1, монета «Камень-ножницы» — 2, монета «Бумага-камень» — 3. Вероятности победы для каждой из монет при любом выборе пары таковы:

	1	2	3
1,2	1/4	1/2	—
1,3	1/2	—	1/4
2,3	—	1/4	1/2

Заметим, что, какую бы монету не выбрала Ася, Вася может из оставшихся выбрать такую монету, что она побеждает с большей вероятностью.

Если Ася выбирает первую монету, то Вася должен выбрать вторую. Если Ася выбрала вторую монету, то Вася должен взять третью, а если Ася взяла третью, то Вася должен взять первую. Следовательно, действуя описанным способом, Вася имеет больше шансов на выигрыш при большом числе сыгранных партий.

Ответ: есть.

9. (2б, 9–11) Ася и Вася вырезают прямоугольники из клетчатой бумаги. Вася ленивый; он кидает игральную кость один раз и вырезает квадрат, сторона которого равна выпавшему числу очков. Ася кидает кость дважды и вырезает прямоугольник с длиной и шириной, равными выпавшим числам. У кого математическое ожидание площади прямоугольника больше?

Решение.

Пусть A и B — независимые случайные величины, принимающие значения 1, 2, …, 6 с равными вероятностями. Тогда математическое ожидание площади Асиного прямоугольника равно $\mathrm{M}AB = \mathrm{M}A \cdot \mathrm{M}B$ (т.к. A и B независимы). Ожидание площади Васиного прямоугольника: $\mathrm{M}A^2$. Сравним два этих ожидания.

$$\mathrm{M}A = \mathrm{M}B = \frac{1}{6}\left(1+2+\ldots+6\right) = 3,5;\ \ \mathrm{M}AB = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25;$$

$$\mathrm{M}A^2 = \frac{1}{6}\left(1+4+\ldots 36\right) = 15\frac{1}{6} > 12,25.$$

Значит, в среднем площадь Васиного квадрата больше, чем площадь Асиного прямоугольника.

Ответ: у Васи.

10. (9–11) На экзамене дается три задачи по тригонометрии, две по алгебре и пять по геометрии. Ваня решает задачи по тригонометрии с вероятностью $p_1 = 0,2$, по геометрии с вероятностью $p_2 = 0,4$, по алгебре с вероятностью $p_3 = 0,5$. Чтобы получить тройку, Ване нужно решить не менее пяти задач.

а) **(1б)** С какой вероятностью Ваня решит не менее пяти задач?

Ваня решил усиленно заняться задачами какого-нибудь одного раздела. За неделю он может увеличить вероятность решения заданий этого раздела на $0,2$.

б) **(2б)** Каким разделом следует заняться Ване, чтобы вероятность решить не менее пяти задач стала наибольшей?

в) **(2б)** Каким разделом следует заняться Васе, чтобы математическое ожидание числа решенных задач стало наибольшим?

Решение.

а) Пусть случайная величина X — число решенных задач по тригонометрии, Y — число решенных задач по геометрии и Z — число решенных задач по алгебре. Тогда сумма $U = X + Y + Z$ есть общее число решенных задач. Мы хотим найти вероятность $\mathrm{P}(U \geq 5)$. Обратимся к вероятности противоположного события

$$\mathrm{P}(U < 5) = \mathrm{P}(U = 0) + \mathrm{P}(U = 1) + \ldots + \mathrm{P}(U = 4),$$

тогда искомая вероятность $\mathrm{P}(U \geq 5) = 1 - \mathrm{P}(U < 5)$.

Запишем таблицы распределения случайных величин X, Y и Z.

Вероятность решить $0 \leq k \leq 3$ задач по тригонометрии равна

$$C_3^k p_1^{3-k} (1 - p_1)^k.$$

X	0	1	2	3
p_X	0,512	0,384	0,096	0,008

Вероятность решить $0 \leq n \leq 5$ задач по геометрии равна

$$C_5^n p_2^{5-n} (1 - p_2)^n.$$

Y	0	1	2	3	4	5
p_Y	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

И вероятность решить $0 \leq m \leq 2$ задач по алгебре равна

$$C_2^m p_1^{2-m} (1 - p_1)^m.$$

Z	0	1	2
p_Z	0,25	0,5	0,25

Теперь заполним аналогичную таблицу для U, представляя сумму решенных задач в виде различных слагаемых. При этом

$$\mathrm{P}(X = k; Y = n; Z = m) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = n)\mathrm{P}(Z = m).$$

U	X	Y	Z	$\mathrm{P}(X=k; Y=n; Z=m)$
0	0	0	0	0,00995328
1	0	0	1	0,01990656
	0	1	0	0,0331776
	1	0	0	0,00746496
2	0	0	2	0,00995328
	0	1	1	0,0663552
	0	2	0	0,0442368
	1	0	1	0,01492992
	1	1	0	0,0248832
	2	0	0	0,00186624
3	0	1	2	0,0331776
	0	2	1	0,0884736
	0	3	0	0,0294912
	1	0	2	0,00746496
	1	1	1	0,0497664
	1	2	0	0,0331776
	2	0	1	0,00373248
	2	1	0	0,0062208
	3	0	0	0,00015552
4	0	2	2	0,0442368
	0	3	1	0,0589824
	0	4	0	0,0098304
	1	1	2	0,0248832
	1	2	1	0,0663552
	1	3	0	0,0221184
	2	0	2	0,00186624
	2	1	1	0,0124416
	2	2	0	0,0082944
	3	0	1	0,00031104
	3	1	0	0,0005184

Вероятность получить l баллов $\mathrm{P}(U=l)$ есть сумма вероятностей каждого из случаев разбиения l.

U	0	1	2	3	4
p_Y	0,00131072	0,03678208	0,13899776	0,24180224	0,24983808

$$\mathrm{P}(U<5)=0,00131072+0,03678208+0,13899776+$$
$$+0,24180224+0,24983808=0,73422528.$$

Искомая вероятность равна $\mathrm{P}(U\geq 5)=1-\mathrm{P}(U<5)\approx 0,27$.

Ответ: $\approx 0,27$.

б) Способом, аналогичным указанному в пункте а) находим, что, если увеличить на $0,2$ вероятность решения задач по тригонометрии p_1, то вероятность решить не менее 5 задач $\mathrm{P}(U\geq 5)$ станет равна $0,41752576\approx 0,42$.

Если увеличить на $0,2$ вероятность решения задач по геометрии p_2, получим $\mathrm{P}(U\geq 5)=0,52636928\approx 0,53$.

Если же увеличить на $0,2$ вероятность решения задач по алгебре p_3, получим $\mathrm{P}(U\geq 5)=0,35814546\approx 0,36$. Таким образом, Ване следует заняться тригонометрией.

Ответ: геометрией.

в) Вычислим математическое ожидание числа решенных задач

$$\mathrm{M}U=\mathrm{M}X+\mathrm{M}Y+\mathrm{M}Z;$$
$$\mathrm{M}X=\mathrm{M}X_1+\mathrm{M}X_2+\mathrm{M}X_3,$$

где X_i равно 1 с вероятностью p_1, если i–ая задача по тригонометрии решена, и 0 с вероятностью $1-p_1$, если не решена. Значит, $\mathrm{M}X_i=0\cdot(1-p_1)+1\cdot p_1=p_1$, откуда $\mathrm{M}X=3p_1$. Аналогично, $\mathrm{M}Y=5p_2$ и $\mathrm{M}Z=2p_3$.

При увеличении p_1 на 0,2 получим $\mathrm{M}U=3(p_1+0,2)+5p_2+2p_3=4,2$.

При увеличении p_2 на 0,2 получим $\mathrm{M}U=3p_1+5(p_2+0,2)+2p_3=4,6$.

При увеличении p_3 на 0,2 получим $\mathrm{M}U=3p_1+5p_2+2(p_3+0,2)=4$.

Таким образом, математическое ожидание числа решенных задач будет наибольшим в случае, если Ваня займется геометрией.

Ответ: геометрией.

11. (3б, 9–11) По условиям шахматного матча победителем объявляется тот, кто опередил соперника на две победы. Ничьи в счет не идут. Вероятности выигрыша у соперников одинаковы. Число результативных партий в таком матче — величина случайная. Найдите ее математическое ожидание.

Решение.

Пусть X — число результативных партий. В начале матча разница между числом побед двух участников равна нулю. Перечислим возможные случаи двух результативных партий, обозначая единицей выигрыш первого и двойкой выигрыш второго участника: 11, 12, 21, 22. Два из четырех случаев означают победу в матче, а именно, 11 и 22. Другие два случая приводят нас в начальное состояние с нулевой разницей количества числа побед. Таким образом, с вероятностью $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ число побед $X=2$ и с той же вероятностью $X=2+\tilde{X}$ где $\tilde{X}$ распределено, так же, как и X. Отсюда составляется уравнение для ожидания

$$\mathrm{M}X=2\cdot\frac{1}{2}+\left(2+\mathrm{M}\tilde{X}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}+\left(2+\mathrm{M}X\right)\cdot\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}X=2;\ \mathrm{M}X=4.$$

Ответ: 4.

12. (3б, 8–11) В соревнованиях по пиханию животами шансы противников на победу относятся так же, как массы их тел. Юмбо весит больше Джумбо, а Пинк весит меньше Бонка. Ничьей в поединке быть не может. Юмбо и Джумбо по очереди должны пихаться с Пинком и Бонком. Какое из событий более вероятно:

$$A=\left\{\textit{Юмбо победит только Пинка, а Джумбо — только Бонка}\right\}$$

или

$$B=\left\{\textit{Юмбо победит только Бонка, а Джумбо — только Пинка}\right\}?$$

Решение.

Обозначим массы противников следующим образом: u, j, p, b в соответствии с первыми буквами их имен. Тогда $u>j$, $b>p$. Вероятность того, что Юмбо победит только Пинка равна произведению вероятностей того, что он победит Пинка и проиграет Бонку, т.е. $\frac{u}{u+p}\cdot\frac{b}{u+b}$. Аналогично, вероятность того, что Джумбо победит только Бонка равна $\frac{j}{j+b}\cdot\frac{p}{j+p}$. Следовательно, вероятность события A равна

$$\mathrm{P}\left(A\right)=\frac{ubjp}{\left(u+p\right)\left(u+b\right)\left(j+p\right)\left(j+b\right)}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{P}\left(B\right)=\frac{upjb}{\left(u+b\right)\left(u+p\right)\left(j+b\right)\left(j+p\right)}.$$

Видно, что $\mathrm{P}\left(A\right)=\mathrm{P}\left(B\right)$.

Ответ: вероятности равны.

13. (3б, 8–11) Монету бросают 10 раз. Найдите вероятность того, что ни разу не выпадут 2 орла подряд.

Решение.

Первый способ:

Общее число исходов при десяти бросаниях монеты равно 2^{10}.

Найдем число комбинаций, где нет двух орлов подряд. Если орлов нет вовсе, то такая последовательность состоит из десяти решек и всего одна. Если орел один, то таких комбинаций $C_{10}^1 = 10$ (орел стоит на любом из 10 мест). Если орлов два, то комбинаций $C_9^2 = 36$ (мы считаем количество вариантов расставить 2 орла по одному между 8 решками или по краям). И так далее. Если орлов k, то комбинаций C_{11-k}^k (число вариантов расставить k орлов в $11-k$ мест между решками и по краям).

Значит, общее число комбинаций равно $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$. Значит, вероятность равна $\dfrac{144}{2^{10}} = \dfrac{9}{64}$.

Второй способ:

Пусть монету бросают n раз, и $f(n)$ — число вариантов бросания без двух орлов подряд. Число допустимых комбинаций, в которых на последнем n-ом месте стоит решка, равно $f(n-1)$. Число допустимых комбинаций, в которых на последнем месте стоит орел, равно $f(n-2)$, так как перед орлом на предпоследнем месте обязательно должна стоять решка. Таким образом $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. При этом, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $\ldots, f(10) = 144$. Всего же вариантов выпадения 10 монет 2^{10}. Следовательно, искомая вероятность есть $\dfrac{144}{2^{10}} = \dfrac{9}{64}$.

Ответ: $\dfrac{9}{64}$.

14. (3б, 9–11) В затылок друг другу выстроились n человек. Более высокие загораживают более низких, и тех не видно. Чему равно математическое ожидание числа людей, которых видно?

Решение.

Обозначим X_n случайную величину «Число видимых среди n человек». Допустим, мы вычислили $\mathrm{M}X_{n-1}$. Что произойдет при добавлении n-го человека в хвост очереди? С вероятностью $\dfrac{1}{n}$ он выше всех прочих. И с вероятностью $\dfrac{n-1}{n}$ он не самый высокий. В первом случае станет видно на одного человека больше, а во втором число тех, кто виден, не изменится. Значит,

$$X_n = \frac{1}{n}\left(X_{n-1} + 1\right) + \frac{n-1}{n} X_{n-1} = X_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{M}X_n = \mathrm{M}X_{n-1} + \frac{1}{n} = \mathrm{M}X_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \ldots = \mathrm{M}X_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Заметим, что $\mathrm{M}X_1 = 1$, поскольку один человек всегда виден. Значит,

$$\mathrm{M}X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ответ: $\mathrm{M}X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

15. (4б, 8–11) В Анчурии проходит чемпионат по шашкам в несколько туров. Дни и города проведения туров определяются жеребьевкой. По правилам чемпионата никакие два тура не могут пройти в одном городе, и никакие два тура не могут пройти в один день. Среди болельщиков устраивается лотерея: главный приз получает тот, кто до начала чемпионата правильно угадает, в каких городах и в какие дни пройдут все туры. Если никто не угадает, то главный приз перейдет в распоряжение оргкомитета чемпионата. Всего в Анчурии восемь городов, а на чемпионат отведено всего восемь дней. Сколько туров чемпионата должен назначить оргкомитет, чтобы с наибольшей вероятностью получить главный приз самому?

Решение.

В таблице туров 8×8 нужно выбрать k ячеек так, чтобы в одном ряду и в одном столбце было выбрано не более одной ячейки. При этом k нужно подобрать так, чтобы число комбинаций было наибольшим возможным.

Число комбинаций равно $C_8^k A_8^k = \dfrac{8! \cdot 8!}{(8-k)! \cdot (8-k)! \cdot k!}$, где C_8^k — количество способов выбрать k городов из восьми без учета порядка и A_8^k — количество способов выбрать k дней из восьми с учетом порядка, так как каждый из дней должен относиться к одному из городов. Из таблицы

k	Количество комбинаций
0	1
1	64
2	1568
3	18816
4	117600
5	376320
6	**564480**
7	322560
8	40320

видно, что максимальное количество комбинаций будет при $k = 6$.

Ответ: 6.

16. (4б, 8–11) В здании n этажей и две лестницы, идущие от первого до последнего этажа. На каждой лестнице между каждыми двумя этажами на промежуточной лестничной площадке есть дверь, разделяющая этажи (с лестницы на этаж пройти можно, даже если дверь заперта). Комендант решил, что слишком много открытых дверей — это плохо, и запер ровно половину дверей, выбрав двери случайным образом. Какова вероятность того, что можно подняться с первого этажа на последний, проходя только через открытые двери?

Решение.

Двери, ведущие с этажа k на следующий этаж, будем называть дверьми этажа k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Если обе двери этажа k закрыты (на обеих лестницах), то попасть с этажа k на этаж $k+1$ нельзя, а следовательно, нельзя попасть и с первого на последний. Если на каждом этаже хотя бы одна из дверей открыта, пройти можно.

Значит, событие $A = \{путь\ возможен\}$ осуществляется, тогда и только тогда, когда нет двух одновременно закрытых дверей на одном и том же уровне. Но дверей закрыта ровно половина. Таким образом, при осуществлении события A, если какая-то дверь на левой лестнице открыта, то соответствующая дверь на правой лестнице закрыта. Всего таких комбинаций 2^{n-1}.

Общее число способов закрыть половину из $2(n-1)$ дверей равно C_{2n-2}^{n-1}.

Таким образом, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2^{n-1}}{C_{2n-2}^{n-1}}$.

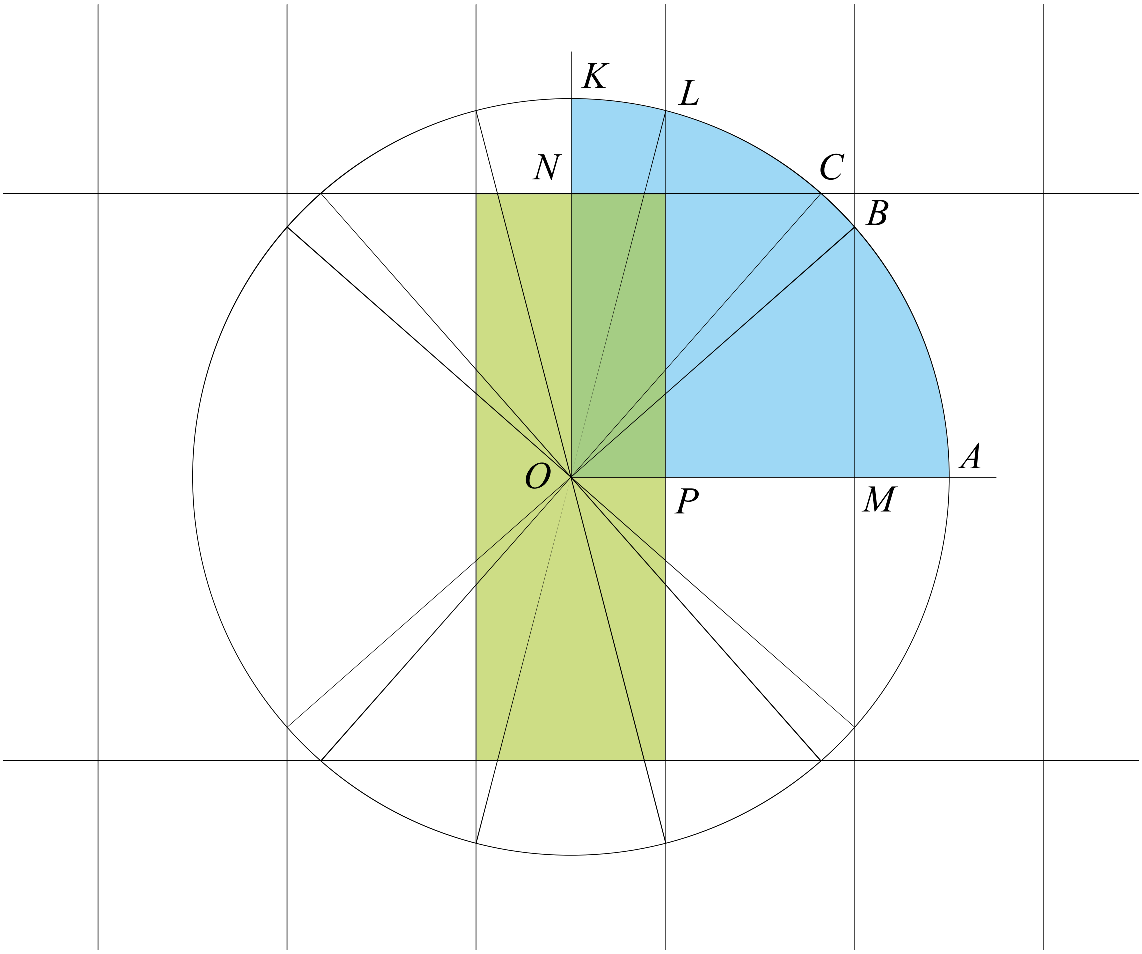
Ответ: $\dfrac{2^{n-1}}{C_{2n-2}^{n-1}}$.

17. (5б, 10–11) В центре прямоугольного биллиардного стола длиной 3 м и шириной 1 м стоит биллиардный шарик. По нему ударяют кием в случайном направлении. После удара шар останавливается, пройдя ровно 2 м. Найдите ожидаемое число отражений от бортиков стола.

Решение.

Изобразим сетку с ячейкой $3\text{ м} \times 1\text{ м}$. Центральная ячейка сетки — стол, выделенный на рисунке светло-зеленым цветом. Нам потребуется распространить сетку во все стороны настолько, чтобы в нее уместился круг радиусом 2 м с центром в центре стола O.

Позволим шарику «проходить сквозь бортики», катясь прямолинейно по сетке. Отражение от бортика стола соответствует пересечению одной линии сетки. Очевидно, можно рассмотреть только четверть круга, то есть все направления, приводящие шар в одну из точек дуги AK.



На рисунке видно, что пересечений 2, если шарик попадает на дугу AB или на дугу CL. Если шарик попадает на дугу BC или KL, то пересечение 1.

$$\overset{\frown}{AB} = \arccos\frac{OM}{OB} = \arccos\frac{3}{4};$$

$$\overset{\frown}{CL} = \arccos\frac{OP}{OL} - \arcsin\frac{ON}{OC} = \arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

Значит, вероятность двух пересечений равна

$$p_2 = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{3}{4} + \arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4}\right).$$

Аналогично, $\overset{\frown}{CB} = \arcsin\frac{3}{4} - \arccos\frac{3}{4}$, $\overset{\frown}{KL} = \arccos\frac{1}{4}$. Поэтому вероятность одного пересечения

$$p_2 = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{3}{4} - \arccos\frac{3}{4}\right).$$

Ожидание числа пересечений:

$$p_1 + 2p_2 = \frac{2}{\pi}\left(3\arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{2}{\pi}\left(3\arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4} + \arccos\frac{3}{4}\right).$

18. (5б, 7–11) В окружность вписан неправильный многоугольник. Если вершина A разбивает дугу, заключенную между двумя другими вершинами, на две неравные части, то такая вершина A называется неустойчивой. Каждую секунду какая-нибудь неустойчивая вершина перепрыгивает в середину своей дуги. В результате каждую секунду образуется новый многоугольник. Докажите, что сколько бы секунд ни прошло, многоугольник никогда не будет равным исходному.

Доказательство.

Рассмотрим расстояния между соседними точками. Эти расстояния образуют числовой набор. Заметим, что при перепрыгивании дисперсия набора уменьшается. Следовательно, многоугольник никогда не станет таким же, как был.

19. (6б, 9–11) Игральную кость бросают шесть раз. Найдите математическое ожидание числа различных выпавших граней.

Решение.

Пусть ζ_i — случайная величина, равная 1, если грань с i очками выпала хотя бы раз и 0, если ни разу. Тогда число различных выпавших граней равно $\zeta = \zeta_1 + \ldots + \zeta_6$. Переходя к ожиданиям получим: $\mathrm{M}\zeta = 6\mathrm{M}\zeta_1$, поскольку все величины ζ_i распределены одинаково. Найдем его математическое ожидание

$$\mathrm{M}\zeta_1 = 0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 + 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

Значит, $M\zeta = 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right) = \frac{6^6 - 5^6}{6^5}$.

Ответ: $\frac{6^6 - 5^6}{6^5}$.