

## Задания-эссе

**1. (эссе, 10 баллов) Выбор числа.**

Психологи и другие специалисты утверждают, что человек не может сделать чисто случайный выбор из предложенных альтернатив. Например, известно, что если человеку предложить выбрать совершенно случайную цифру, то он, скорее всего, выберет цифру 7. Причины этого до конца неизвестны, хотя есть различные гипотезы.

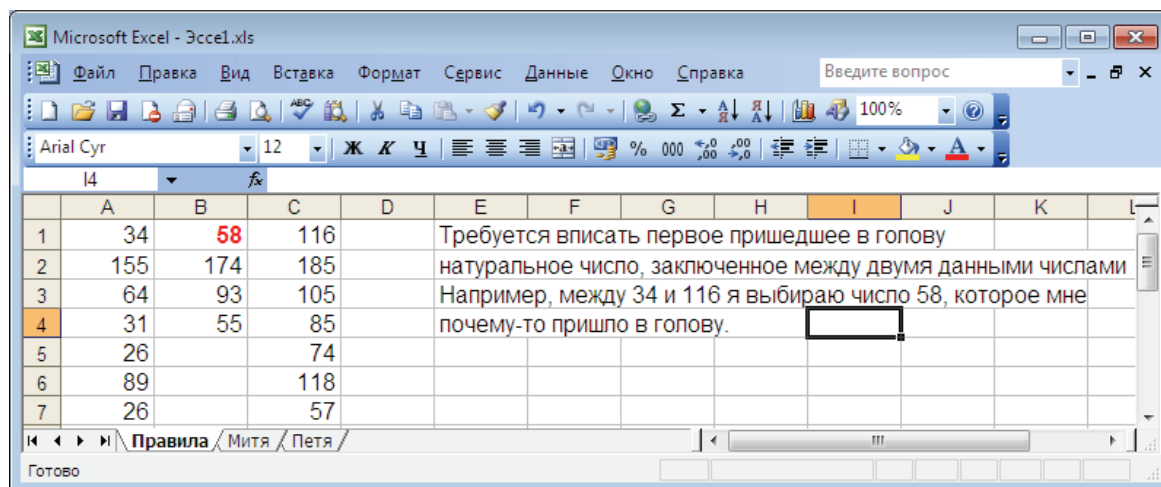
Мы предлагаем Вам экспериментально проверить, правдоподобна ли гипотеза: *«значительное число людей чаще всего подсознательно выбирают числа, далекие от краев и от середины предложенного числового ряда, то есть делящее ряд чисел близко к отношению 1:3 или 3:1».*

Мы подготовили файл `esse1.xls`. Его можно скачать здесь или с помощью отдельной ссылки на странице «Задачи».

| A   | B | C   |
|-----|---|-----|
| 34  |   | 116 |
| 155 |   | 185 |
| 64  |   | 105 |
| 31  |   | 85  |
| 26  |   | 74  |
| 89  |   | 118 |
| 26  |   | 57  |
| 100 |   | 129 |
| 188 |   | 229 |
| 148 |   | 236 |
| 178 |   | 268 |
| 97  |   | 161 |
| 115 |   | 165 |
| 111 |   | 183 |
| 156 |   | 208 |
| 75  |   | 140 |
| 52  |   | 131 |
| 153 |   | 245 |
| 15  |   | 69  |
| 84  |   | 180 |
| 18  |   | 78  |
| 117 |   | 198 |
| 128 |   | 193 |
| 126 |   | 208 |
| 22  |   | 46  |

| A   | B | C   |
|-----|---|-----|
| 113 |   | 187 |
| 120 |   | 162 |
| 91  |   | 181 |
| 15  |   | 84  |
| 30  |   | 81  |
| 57  |   | 86  |
| 120 |   | 215 |
| 47  |   | 124 |
| 17  |   | 78  |
| 105 |   | 129 |
| 24  |   | 101 |
| 11  |   | 85  |
| 120 |   | 152 |
| 159 |   | 235 |
| 31  |   | 104 |
| 142 |   | 183 |
| 37  |   | 107 |
| 189 |   | 270 |
| 110 |   | 210 |
| 180 |   | 260 |
| 28  |   | 84  |
| 88  |   | 150 |
| 61  |   | 87  |
| 164 |   | 228 |
| 75  |   | 137 |

В каждой строке таблицы — начало и конец натурального ряда: в ячейке А — начальное число, в ячейке С — конечное число. Респонденту (испытуемому) предлагается быстро вписать в ячейку В любое число, заключенное между этими числами. Это нужно сделать в каждой строке. Всего одному респонденту предлагается 50 строк.



На рисунке показано начало эксперимента. Можно все опыты с разными людьми фиксировать в одном и том же файле на разных страницах.

Затем нужно определить, в каком отношении каждое выбранное число разбивает отрезок между первым и последним числом. В показанном примере число 58 отсекает от отрезка от 34 до 116 примерно 29 %, поскольку

$$\frac{58 - 34}{116 - 34} \approx 0,29.$$

Все вычисления удобно проводить здесь же — в Excel. Когда все отношения получены, их следует проанализировать для каждого человека и для всех вместе. Нужно сгруппировать полученные доли (проценты) в интервалы длиной, например, 5% (длину интервала нужно подобрать так, чтобы результаты были наглядны). Затем нужно найти, какая доля результатов попадает в каждый интервал. Результаты удобно представить с помощью диаграмм.

Гипотезу придется отвергнуть, как неправдоподобную, если вблизи точек 25% и 75% не наблюдается заметного преобладания частот. Если же оно наблюдается, то следует признать, что гипотеза правдоподобна. Чем больше выбранных чисел группируется около точек 25% или 75%, тем более правдоподобна гипотеза (к сожалению, этого недостаточно, чтобы наверняка утверждать, что она верна).

Может быть, вам удастся найти другие правдоподобные гипотезы или закономерности, которые незаметны, если число респондентов мало.

Чем респондентов больше, тем лучше. Если ограничиться 50 числами для каждого респондента, то для проявления закономерностей нужно опросить хотя бы 20 – 30 человек — одноклассников, друзей, родственников. Не обязательно, чтобы респондент сам вводил числа в компьютер. Если ему это непривычно, он может это делать на распечатке или просто продиктовать вам. Нужно только помнить, что все опросы должны проводиться независимо друг от друга.

**2. (эссе, 10 баллов) Секрет успеха.**

В таблице представлены некоторые данные по 38 странам мира. В первом столбце — расходы государства на дошкольное образование. Второй столбец — расходы на начальное и среднее общее образование (в процентах от ВВП на душу населения). Третий столбец — средний балл, полученный школьниками этой страны в тестировании PISA 2006 года — чем выше балл, тем лучше школьники справились с тестом. Мы приготовили файл *esse2.xls*. Его можно скачать на странице «Задачи».

Интересно, наблюдается ли связь между финансированием образования и результатами теста PISA? Попробуйте исследовать представленные данные, сделать выводы и обосновать их. В качестве инструмента можно использовать диаграммы рассеивания и другие подходящие статистические средства. Не забудьте, что если вы высказываете гипотезы, то лучше эти гипотезы обосновать. Напишите на эту тему эссе — 2 – 3 страницы.

| Страны             | Расходы на дошкольное образование | Расходы на начальное и среднее образование | Средний международный балл PISA |
|--------------------|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| Норвегия           | 11                                | 40   | 490                             |
| США                | 20                                | 47   | 474                             |
| Ирландия           | 16                                | 52   | 501                             |
| Швейцария          | 11                                | 83   | 530                             |
| Нидерланды         | 16                                | 71   | 531                             |
| Австрия            | 19                                | 54   | 505                             |
| Исландия           | 23                                | 51   | 506                             |
| Дания              | 15                                | 53   | 513                             |
| Швеция             | 16                                | 61   | 502                             |
| Великобритания     | 21                                | 48   | 495                             |
| Бельгия            | 15                                | 47   | 520                             |
| Германия           | 17                                | 65   | 504                             |
| Финляндия          | 14                                | 41   | 548                             |
| Япония             | 14                                | 48   | 523                             |
| Франция            | 16                                | 48   | 496                             |
| Испания            | 18                                | 47   | 480                             |
| Италия             | 24                                | 55   | 462                             |
| Новая Зеландия     | 19                                | 62   | 522                             |
| Словения           | 29                                | 31   | 504                             |
| Израиль            | 15                                | 63   | 442                             |
| Корея              | 15                                | 53   | 547                             |
| Чешская Республика | 16                                | 48   | 510                             |
| Португалия         | 23                                | 55   | 466                             |
| Эстония            | 10                                | 73   | 515                             |
| Венгрия            | 25                                | 74   | 491                             |
| Словакия           | 18                                | 34   | 492                             |
| Литва              | 23                                | 57   | 486                             |
| Латвия             | 25                                | 66   | 486                             |
| Польша             | 31                                | 73   | 495                             |
| Мексика            | 15                                | 31   | 406                             |
| Россия             | 22                                | 22   | 476                             |
| Чили               | 20                                | 30   | 411                             |
| Аргентина          | 12                                | 32   | 381                             |
| Румыния            | 11                                | 36   | 415                             |
| Болгария           | 29                                | 63   | 413                             |
| Уругвай            | 11                                | 22   | 427                             |
| Бразилия           | 14                                | 33   | 370                             |
| Иордания           | 17                                | 37   | 384                             |

### 3. (эссе, 10 баллов) Численность толпы.

На фотографии — толпа людей. Как оценить (подсчитать приблизительно) число людей в этой толпе? Может быть, можно что-то придумать?



Попробуйте придумать подходящий метод, воспользоваться им и сделать оценку численности толпы на фотографии. Напишите подробно, что за метод вы придумали, почему он должен правильно работать, как им пользоваться и что у вас получается. С интересом ждем ваших результатов — сколько же людей на фото?

### Задачи

#### 4. (6 – 11 классы, 1 балл) Аня ждёт автобус.

Какое событие имеет наибольшую вероятность?

A == {Аня ждет автобуса не меньше минуты.}

B == {Аня ждет автобуса не меньше двух минут.}

B == {Аня ждет автобуса не меньше пяти минут.}

**5. (6 – 11 классы, 1 балл) Ряд из костей.**

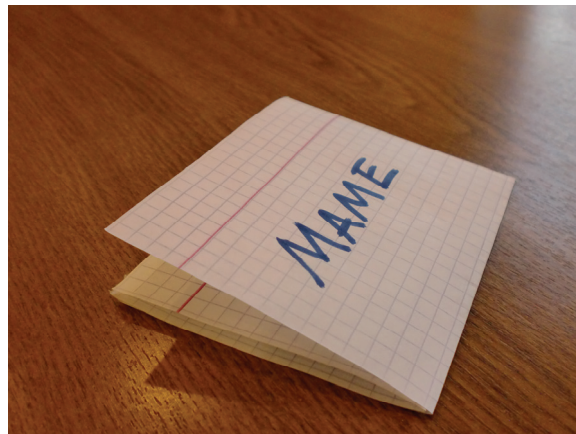
2012 правильных игральных костей (кубиков) составили в ряд таким образом, что каждые две соседние кости прилегают друг другу одинаковыми гранями (принцип домино). В остальном положение костей случайное. Найдите сумму очков, которые оказались на поверхности получившейся фигуры.

**6. (6 – 11 классы, 1 балл) Неизменная дисперсия.**

В наборе  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  замените одно число двумя другими целыми числами так, чтобы дисперсия набора и его среднее не изменились.

**7. (6 – 11 классы, 1 балл) Записка.**

Вася написал на листке бумаги записку, сложил ее вчетверо, надписал сверху «МАМЕ» (см. фото). Затем он развернул записку, дописал еще кое-что, опять сложил записку по линиям сгиба случайным образом (не обязательно, как раньше) и опять оставил на столе, положив случайной стороной вверх. Найдите вероятность того, что надпись «МАМЕ» по-прежнему сверху.



**8. (6 – 11 классы, 1 балл) Волшебные пирожки.**

У Алисы в кармане шесть волшебных пирожков — два увеличивающих (съешь — вырастешь), а остальные уменьшающие (съешь — уменьшишься). Когда Алиса встретила Мэри Энн, она, не глядя, вынула из кармана три пирожка и отдала их Мэри. Найдите вероятность того, что у одной из девочек нет ни одного увеличивающего пирожка.

**9. Круглый стол.**

Петр Иванович, еще 49 мужчин и 50 женщин в случайном порядке рассаживаются вокруг круглого стола. Назовем мужчину довольным, если рядом с ним сидит женщина. Найдите:

- а) (6 – 11 классы, 1 балл) вероятность того, что Петр Иванович доволен;
- б) (8 – 11 классы, 1 балл) математическое ожидание числа довольных мужчин.

**10. Ряд медиан.**

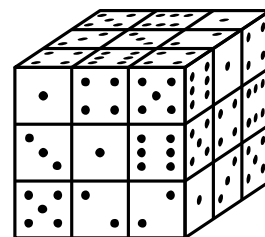
Ваня написал на доске число 1, а затем еще несколько чисел. Как только Ваня пишет очередное число, Митя вычисляет медиану уже имеющегося набора чисел и записывает его себе в тетрадку. В некоторый момент в Митиной тетради записаны числа: 1; 2; 3; 2,5; 3; 2,5; 2; 2; 2; 2,5.

- а) (6 – 11 классы, 1 балл) Какое число записано на доске четвертым?
- б) (6 – 11 классы, 1 балл) Какое число записано на доске восьмым?

### 11. Большой кубик.

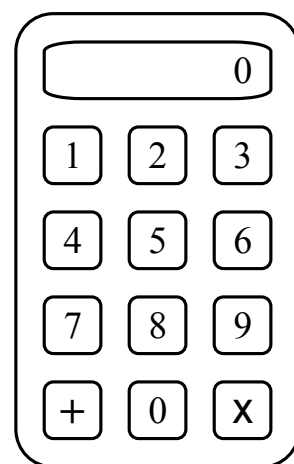
Из 27 игральных кубиков сложен куб.

- а) (6 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что на поверхности куба оказалось ровно 25 шестерок.
- б) (7 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что на поверхности куба оказалась хотя бы одна единица.
- в) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите математическое ожидание числа шестёрок, смотрящих наружу.
- г) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите математическое ожидание числа шестерок, которые оказались на поверхности куба.
- д) (9 – 11 классы, 3 балла) Найдите математическое ожидание случайной величины: «Число различных цифр, оказавшихся на поверхности куба».



### 12. (8 – 11 классы, 2 балла) Калькулятор.

На клавиатуре калькулятора есть цифры от 0 до 9 и знаки двух действий (см. рисунок). Вначале на дисплее написано число 0. Можно нажимать любые клавиши. Калькулятор выполняет действия в последовательности нажатий. Если знак действия нажать подряд несколько раз, то калькулятор запомнит только последнее нажатие. Учёный нажал очень много кнопок в случайной последовательности. Найдите приблизительно вероятность, с которой результат получившейся цепочки действий нечетное число?



### 13. Игра «Уникум».

Петя и еще 9 человек играют в такую игру: каждый бросает игральную кость. Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.

- а) (6 – 11 классы, 1 балл) Какова вероятность того, что Петя получит приз?
- б) (8 – 11 классы, 1 балл) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?

### 14. Что? Где? Когда?

В игре «Что? Где? Когда?» разыгрываются 13 конвертов с вопросами от телезрителей. Конверты выбираются по очереди в случайном порядке с помощью волчка. Если знатоки отвечают верно, зарабатывают очко, если неверно — одно очко достается телезрителям. Игра оканчивается, как только одна из команд набрала 6 очков.

Предположим, что силы команд Знатоков и Телезрителей равны.

- а) (8 – 11 классы, 2 балла) Найдите математическое ожидание числа очков, набранных командой Знатоков за 100 игр.
- б) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что в следующей игре конверт номер 5 будет разыгран.

**15. Fish or chicken?**

На борту авиалайнера  $2n$  пассажиров, и авиакомпания загрузила для них  $n$  порций питания с курицей и  $n$  порций с рыбой. Известно, что пассажир с вероятностью  $0,5$  предпочитает курицу, и с вероятностью  $0,5$  — рыбу. Назовём пассажира недовольным, если ему осталось не то, что он предпочитает.

- а) (8 – 11 классы, 2 балла)** Найдите наиболее вероятное число недовольных пассажиров.
- б) (9 – 11 классы, 3 балла)** Найдите математическое ожидание числа недовольных пассажиров.
- в) (9 – 11 классы, 4 балла)** Найдите дисперсию числа недовольных пассажиров.

**16. (7 – 11 классы, 2 балла) ЕГЭ в Анчурии.**

В Анчурии проходит единый государственный экзамен. Вероятность угадать верный ответ на каждый вопрос экзамена равна  $0,25$ .

В 2011 году, чтобы получить аттестат, нужно было ответить верно на 3 вопроса из 20. В 2012 году Управление школ Анчурии решило, что 3 вопроса это мало. Теперь нужно верно ответить на 6 вопросов из 40. Спрашивается, если ничего не знать, а просто угадывать ответы, в каком году вероятность получить анчурийский аттестат выше — в 2011 или в 2012?

**Три задачи про носки****17. Удачные пары.**

Вася купил  $n$  пар одинаковых носков. В течение  $n$  дней Вася не знал проблем: каждое утро брал из шкафа новую пару и носил ее целый день. Через  $n$  дней Васина мама постирала все носки в стиральной машине и разложила их по парам, как получилось, поскольку, повторим, носки одинаковые. Назовем пару носков удачной, если оба носка в этой паре были на Васе в один и тот же день.

- а) (7 – 11 классы, 2 балла)** Найти вероятность того, что все получившиеся пары удачные.
- б) (8 – 11 классы, 3 балла)** Доказать, что матожидание числа удачных пар больше  $0,5$ .

**18. (10 – 11 классы, 5 баллов) Любимая пара.**

На сушилке в случайном порядке (как достали из стиральной машины) висит  $n$  носков. Среди них — два любимых носка Рассеянного Учёного. Носки загорожены сохнувшей простыней, поэтому Учёный их не видит, и достает по одному носку на ощупь. Найдите математическое ожидание числа носков, снятых Ученым к моменту, когда у него окажутся оба любимых носка.

**19. (10 – 11 классы, 6 баллов) Первая пара.**

На сушилке в случайном порядке (как достали из стиральной машины) висит  $n$  пар носков. Двух одинаковых пар нет. Носки висят за сохнувшей простыней, поэтому Рассеянный Учёный, а достает по одному носку на ощупь и сравнивает каждый новый носок со всеми предыдущими. Найдите математическое ожидание числа носков, снятых к моменту, когда у Учёного окажется какая-нибудь пара.