LXXVII Московская математическая олимпиада

2 марта 2014 года • 9 класс

Задача 1. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

Задача 2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Задача 3. Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

Задача 4. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

Задача 5. *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

Задача 6. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, …, A_{10}, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности.

Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик.

Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, …, A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

XII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 13 апреля.
Подробная информация на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Закрытие LXXVII Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 23 марта в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте `www.mccme.ru/mmo/`