Московский центр непрерывного математического образования

VII Заочная Интернет-олимпиада по теории вероятностей и статистике для 6 – 11 классов

I. Задания-эссе

1. Жребий с одной монетой (эссе). Вот задача, с которой однажды столкнулись пятеро: нужно было бросить справедливый жребий, чтобы выбрать одного из них. Из подручных средств была только монетка. Возникло два предложения, как можно организовать жребий.

Первое предложение. *Все пятеро бросают монетку по очереди. Те, у кого выпала решка, выбывают из розыгрыша, а те, у кого выпал орёл, – остаются. Оставшиеся еще раз бросают по монетке – делают новый круг. И так далее. Если на каком-то круге все выбросят решки, то круг не считается и разыгрывается еще раз. Бросание продолжается до тех пор, пока на каком-то из кругов не останется только один участник, у которого выпал орёл. Он и считается победителем жребия.*

Второе предложение. *Каждому участнику присвоим номер от* 0 *до* 4. *Затем бросаем монету* 3 *раза. Если выпал орёл, то записываем единицу. Если решка, – записываем ноль. Получается двоичная последовательность длины три. Интерпретируем ее как число от* 0 *до* 7. *Например, если бросания дали «орёл-решка-орёл», получается*

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Если полученное число от 0 *до* 4, *то выигрывает тот, чей номер получился. Если число от* 5 *до* 7, *то бросания не засчитываются и всё повторяется еще раз.*

Приведут ли рано или поздно оба способа к цели, то есть не может ли получиться бесконечная серия бросаний? Какой способ в среднем быстрее выявит победителя? Можно ли как-нибудь подсчитать или хотя бы оценить математическое ожидание числа бросков (то есть времени), которое придётся сделать, если пользоваться первым способом? А если пользоваться вторым способом?

Попробуйте придумать какой-нибудь свой метод. Может быть, вам удастся сделать его более экономичным, чем наши.

В общем, мы предлагаем вам провести вероятностный анализ задачи, причем настолько полный и подробный, насколько у вас получится.

Возможная идея исследования. Оба предложенных варианта результативны, в том смысле, что бесконечная последовательность бросков получиться не может. Докажем это для первого способа. Бесконечная последовательность бросков может случиться, только если, начиная с какого-то момента, все оставшиеся участники выбрасывают то же самое, что и первый из них. То есть, если первый из оставшихся выбрасывает орла, то и все остальные – тоже. Если он выбрасывает решку, то и все остальные тоже выбрасывают решку. И это продолжается до бесконечности. Предположим, оставшихся участников k. Вероятность того, что все они, выбросят ту же сторону монеты, что и первый из них, равна $0,5^{k-1}$. Вероятность того, что они сделают это бесконечное число раз, равна бесконечному произведению

$$0,5^{k-1}\cdot 0,5^{k-1}\cdot 0,5^{k-1}\cdot \ldots \cdot 0,5^{k-1}\cdot \ldots.$$

Это произведение не может быть отрицательным. С другой стороны, оно меньше любого положительного числа. Значит, оно равно нулю. Таким образом, вероятность бесконечной последовательности бросков нулевая. Примерно такое же рассуждение показывает, что и второй способ рано или поздно приведет к успеху.

Оценить математическое ожидание времени, затраченного на жребий можно разными способами. Грубую оценку можно сделать, исходя из того что на каждом «кругу жребия» выбывает в среднем половина участников.

Второй способ – более экономичный. Жребий даст результат, если при трехкратном бросании монеты выпало число от 0 до 4 (из возможного набора значений от 0 до 7); вероятность этого равна $\frac{5}{8}$. Легко догадаться (а можно доказать), что по этой причине математическое ожидание числа серий по три броска равно $\frac{8}{5}=1,6$. Значит, математическое ожидание числа бросков одной монеты равно $3\cdot 1,6=4,8$. Это число меньше, чем 5 – наименьшее число бросков, которое придется сделать пяти участникам, если они используют первый способ.

2. Морской бой (эссе). Надеемся, вы умеете играть в морской бой. Если нет, то правила игры найдутся в интернете. А можно спросить у знающих людей.

Морской бой – игра вероятностная. Почти каждый раз игрок делает выстрел наудачу. Вероятность попадания зависит от того, сколько на поле противника осталось свободного места, как расположены корабли, какой стратегии (схемы игры) придерживается сам игрок.

Мы остановимся только на одном аспекте – на расположении кораблей в начале игры. Зависит ли вероятность выигрыша от того, как именно противник расставил корабли? Каких правил расстановки нужно придерживаться, чтобы увеличить свои шансы на победу? А как корабли расставлять не следует? Попробуйте провести вероятностный анализ этой задачи настолько полный, насколько это возможно. Чем более глубокий и аргументированный анализ вы проведете, тем лучше и тем больше баллов вы заработаете на этой непростой задаче.

Возможная идея исследования. Очевидно, вероятность попасть в корабль тем меньше, чем больше осталось клеток, где корабль может прятаться. Если корабль противника стоит «в открытом море», то при попадании в него из дальнейшей игры исключается не только сам корабль, но и вокруг лежащие клетки. Значит, нужно минимизировать число клеток, расположенных вокруг кораблей. Это удастся сделать, если расставить корабли вдоль берегов или даже в углах поля. В особенности это касается больших кораблей. Именно на эту тему и предлагалось пофантазировать в данном задании. Многие участники предложили именно эту идею и даже сделали количественные попытки оценить вероятность поражения малых кораблей в начале боя.

3. Куда лететь быстрее? (эссе). Правда ли, что самолёт тратит на полёт разное время, в зависимости от того, на восток или на запад он летит? Всегда ли это так? Зайдите на сайт крупного аэропорта или крупной авиакомпании, а лучше – нескольких авиакомпаний или аэропортов. Выберите перелёты с востока на запад и обратно. Соберите и обработайте нужную информацию. Насколько отличаются продолжительности полётов в ту и в другую сторону? Зависит ли это от расстояния? Нужно придумать статистический показатель, описывающий разницу. Устойчивая ли она? Трудность в том, что просто разность времени туда и времени обратно нам мало что даст – ведь нужно учитывать и очень дальние перелёты и сравнительно короткие. Если разница есть, с чем она может быть связана? Можно ли оценить постоянство и силу этого удивительного фактора? Действительно ли виноваты восток и запад? Может быть, похожая картина наблюдается и с другими полётами, например, с севера на юг и обратно? Вопросов множество. Попробуйте разыскать, описать, проанализировать данные и пофантазировать.

1. Сбор и представление данных

Мы сделали случайную выборку, в которую вошли 70 регулярных рейсов (для более представительных результатов нужно больше, но для иллюстрации достаточно и этого).

На восток			На запад			$T_2 - T_1$	$T_1 + T_2$	δ
Рейс	Пункт А	T_1	T_2	Пункт В	Рейс			
R2 731	Москва	1:55	2:00	Оренбург	R2 732	0:05	3:55	0,0213
PS 9262	Париж	3:05	3:20	Киев	PS 9263	0:15	6:25	0,0390
MS-768	Барселона	4:00	4:30	Каир	MS-767	0:30	8:30	0,0588
VX90	С.-Франциско	5:05	6:00	Вашингтон	VX77	0:55	11:05	0,0827
AM680	Мехико	5:09	5:57	Монреаль	AM681	0:48	11:06	0,0721
V0 7201	Панама Сити	2:20	2:00	Каракас	V0 7208	–0:20	4:20	0,0769
EK0090	Женева	6:20	6:50	Дубай	EK0089	0:30	13:10	0,0380
KC 140	Тбилиси	3:35	4:10	Алматы	KC 139	0:35	7:45	0,0753
AB8486	Берлин	2:10	2:20	С.-Петербург	AB8487	0:10	4:30	0,0370
SU-2393	Цюрих	3:20	3:30	Москва	SU-2392	0:10	6:50	0,0244
TA-917	Лима	5:00	5:05	Сан-Паоло	TA-916	0:05	10:05	0,0083
WS-724	Ванкувер	4:26	5:03	Торонто	WS-719	0:37	9:29	0,0650
TK-636	Триполи	2:45	2:55	Стамбул	TK-635	0:10	5:40	0,0294
ET-910	Абуджа	4:30	4:40	Аддис-Абеба	ET-911	0:10	9:10	0,0182
UT345	Москва	3:20	3:50	Омск	UT346	0:30	7:10	0,0698
S7 3261	Новосибирск	4:10	4:20	Якутск	S7 3262	0:10	8:30	0,0196
W2 3121	Рейкявик	3:30	3:45	Берлин	W2 3124	0:15	7:15	0,0345
RO 416	Мадрид	3:35	4:00	Бухарест	RO 415	0:25	7:35	0,0549
IB 5885	Лиссабон	2:20	2:20	Любляна	IB 5884	0:00	4:40	0,0000
SU1410	Москва	2:20	2:30	Екатеринбург	SU1411	0:10	4:50	0,0345
AZ 7180	Милан	1:55	2:05	София	AZ 7179	0:10	4:00	0,0417
UA 122	Вашингтон	7:25	8:25	Лондон	UA 123	1:00	15:50	0,0632
FI 644	Вашингтон	5:45	6:20	Рейкьявик	FI 645	0:35	12:05	0,0483
DL 1610	Денвер	2:49	3:18	Детройт	DL 1645	0:29	6:07	0,0790
UA 1279	Денвер	2:38	2:48	Новый Орлеан	UA 295	0:10	5:26	0,0307
DL 1577	Лос-Анджелес	3:58	3:56	Новый Орлеан	DL 1325	–0:02	7:54	0,0042
AM 7901	Мехико	3:47	3:51	Панама	AM 7920	0:04	7:38	0,0087
AR 1365	Лима	4:35	5:25	Буэнос-Айрес	AR 1364	0:50	10:00	0,0833
SU 6276	Рим	3:40	3:45	С.-Петербург	SU 3276	0:05	7:25	0,0112
UT 439	Москва	4:05	4:20	Томск	UT 440	0:15	8:25	0,0297
SU 2193	Амстердам	3:15	3:30	Москва	SU 2192	0:15	6:45	0,0370
KL 1395	Амстердам	2:50	3:00	С.-Петербург	KL 1396	0:10	5:50	0,0286
KL 1363	Амстердам	1:55	2:05	Варшава	KL 1364	0:10	4:00	0,0417
B2 868	Амстердам	2:30	2:40	Минск	B2 867	0:10	5:10	0,0323
OU 451	Амстердам	1:55	2:05	Загреб	OU 450	0:10	4:00	0,0417
TP 802	Лиссабон	2:35	2:40	Милан	TP 809	0:05	5:15	0,0159

S7 4302	Лиссабон	5:25	5:35	Москва	S7 4301	0:10	11:00	0,0152
TP 536	Лиссабон	3:20	3:40	Берлин	TP 537	0:20	7:00	0,0476
TP 692	Лиссабон	3:20	3:35	Вена	TP 691	0:15	6:55	0,0361
AB 5032	Лондон	1:35	1:40	Гамбург	AB 5033	0:05	3:15	0,0256
BA 798	Лондон	2:50	3:05	Хельсинки	BA 799	0:15	5:55	0,0423
UN 7401	Лондон	3:55	4:10	Москва	UN 7402	0:15	8:05	0,0309
BA 840	Лондон	3:10	3:30	Киев	BA 841	0:20	6:40	0,0500
BA 884	Лондон	3:10	3:25	Бухарест	BA 887	0:15	6:35	0,0380
IB 5300	Барселона	4:10	4:35	Москва	IB 5757	0:25	8:45	0,0476
VY 7892	Барселона	4:00	4:15	С.-Петербург	VY 7893	0:15	8:15	0,0303
SU 6741	С.-Петербург	2:50	2:40	Уфа	SU 6742	–0:10	5:30	0,0303
SU 6711	С.-Петербург	2:25	2:35	Пермь	SU 6712	0:10	5:00	0,0333
SU 6765	С.-Петербург	2:15	2:15	Казань	SU 6766	0:00	4:30	0,0000
SU 6753	С.-Петербург	2:25	2:30	Самара	SU 6754	0:05	4:55	0,0169
SU 6541	С.-Петербург	4:20	4:50	Новосибирск	SU 6542	0:30	9:10	0,0545
SU1478	Москва	4:30	4:50	Абакан	SU1479	0:20	9:20	0,0357
SU 1654	Москва	6:20	7:25	Чита	SU 1655	1:05	13:45	0,0788
SU 1742	Москва	8:20	8:50	Ю.-Сахалинск	SU 1743	0:30	17:10	0,0291
S7 121	Москва	5:15	5:45	Братск	S7 122	0:30	11:00	0,0455
UT 465	Москва	5:25	5:35	Иркутск	UT 466	0:10	11:00	0,0152
UN 2101	Москва	4:10	5:10	Норильск	UN 102	1:00	9:20	0,1071
SU 330	Москва	6:10	6:40	Улан-Батор	SU 331	0:30	12:50	0,0390
UN 273	Москва	3:15	3:35	Астана	UN 204	0:20	6:50	0,0488
S7 4461	Москва	7:55	8:20	Пекин	S7 4462	0:25	16:15	0,0256
KE 924	Москва	8:20	9:20	Сеул	KE 923	1:00	17:40	0,0566
SU 270	Москва	9:15	10:00	Бангкок	SU 271	0:45	19:15	0,0390
9W 64	Дели	4:25	4:20	Бангкок	9W 63	–0:05	8:45	0,0095
JL 740	Дели	8:20	8:35	Токио	JL 749	0:15	16:55	0,0148
OZ 6378	Дели	9:45	10:25	Сеул	OZ 6377	0:40	20:10	0,0331
KE 868	Улан-Батор	3:00	3:35	Сеул	KE 867	0:35	6:35	0,0886
SV 760	Эр-Рияд	4:00	4:30	Дели	SV759	0:30	8:30	0,0588
WY 686	Эр-Рияд	2:35	2:20	Маскат	WY 685	–0:15	4:55	0,0508
LX 1310	Цюрих	3:00	3:15	С.-Петербург	LX 1311	0:15	6:15	0,0400
AF 1497	Касабланка	2:00	2:00	Париж	AF 1197	0:00	4:00	0,0000

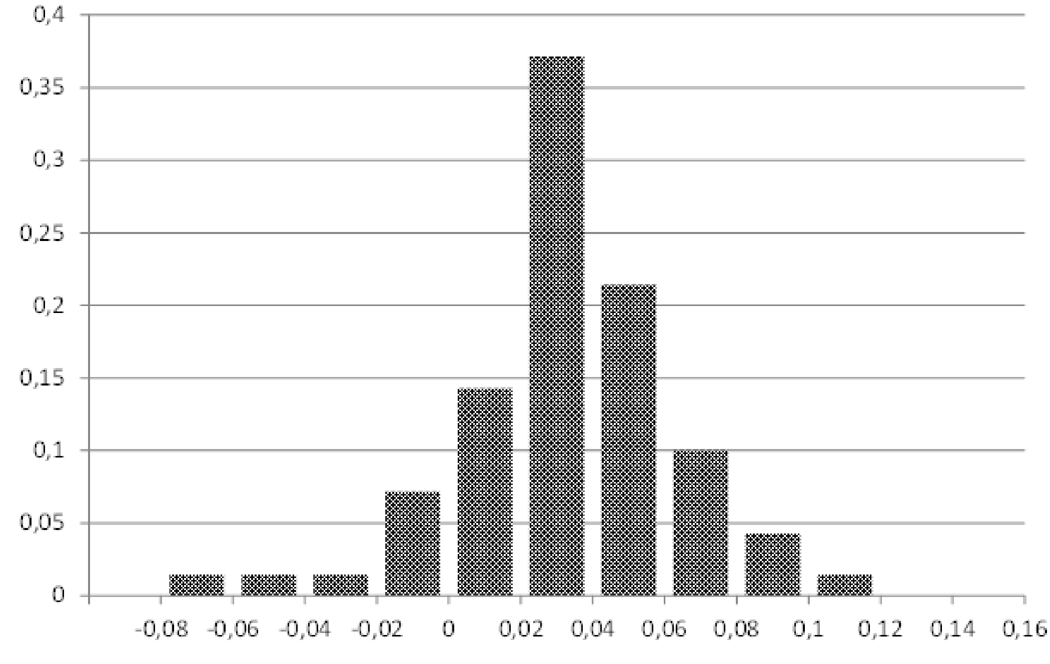
Для убедительности мы включили в таблицу номера рейсов, хотя можно было обойтись без них. Мы считаем, что авиакомпании выполняют рейсы туда и обратно, как правило, одним и тем же самолетом, поэтому тип самолета на разницу во времени полетов значительно не влияет. Время полета на восток мы обозначили T_1, а время обратного полета – T_2. Сразу приходит в голову разность $T_2 - T_1$. В таблице видно, что эта разность почти везде положительна. Пять строк, где разность отрицательна, выделены. Похоже, что *обычно на восток самолеты летят действительно быстрее*.

Описание данных

Можно ли сравнивать, например, рейс С.-Петербург–Пермь–С.-Петербург (разница 10 минут) с рейсом Москва–Сеул–Москва (разница час)? Конечно, нет – ведь от Сеула до Москвы в четыре с лишним раза дальше, чем от Петербурга до Перми. Разумный показатель задержки должен учитывать общую длительность полетов. Разделим разность на T_1+T_2. Получается показатель

$$\delta=\frac{T_2-T_1}{T_1+T_2},$$

не зависящий напрямую от дальности перелетов, который характеризует *относительную задержку западного рейса.* Разумеется, показатель δ не идеален – он не учитывает, что маршруты редко проходят строго с востока на запад и обратно. Чаще самолеты летят «наискосок» – на северо-восток или юго-восток. Кроме того, не учтены широты, в которых проходит полет. Но это уже что-то. Посмотрим на распределение δ. Для этого сгруппируем значения подходящим образом, например, шагом 0,02 и построим гистограмму.



На рисунке без вычислений видно, что величина δ концентрируется вблизи значения 0,03. Вычисления подтверждают это – среднее арифметическое относительной задержки равно $0,0347$.

Не случайность ли?

Могла ли такая средняя задержка получиться случайно просто потому, что мы не очень удачно выбрали рейсы? Не будет ли картина иной, если мы возьмем другие авиакомпании и другие города? Можно попытаться разобраться в этом подробно с помощью *стандартного отклонения*[1], но это требует весьма глубоких знаний.

Применим более простое и интуитивное рассуждение. Сформулируем гипотезу: *на самом деле никакой разницы во времени нет*, и в среднем длительность полетов на восток и на запад одинакова. Тогда *положительные и отрицательные значения* δ *должны быть равновозможны*. Поэтому, если исключить из рассмотрения нулевые значения, вероятности положительных и отрицательных значений[2] δ должны равняться 0,5:

$$\mathrm{P}(\delta < 0) = \mathrm{P}(\delta > 0) = 0{,}5.$$

Всего у нас 70 значений, из них 3 нулевых (рейсы Лиссабон–Любляна, Санкт-Петербург–Казань и Касабланка–Париж). Остается 67 ненулевых значений. Считая, что наша гипотеза верна, спросим себя, а сколько разумно ждать положительных и отрицательных значений? Ясно, что положительными должна оказаться примерно половина[3]. *А у нас* 62 *из* 67 *значений оказались положительными!* Вероятность того, что при указанных условиях положительны будут 62 значения или больше, равна

$$C_{67}^{62}0{,}5^{67} + C_{67}^{63}0{,}5^{67} + \ldots + C_{67}^{67}0{,}5^{67} \approx 0{,}000000000000071,$$

что *ничтожно мало* по сравнению с вероятностью противоположного события «меньше чем 62 значения положительны». Скорее всего, исходная гипотеза ошибочна, и на самом деле вероятность положительного значения δ намного выше, чем вероятность отрицательного.

Мы, если не доказали, то *почти научно обосновали*, что полеты на запад *в среднем дольше полетов на восток и что это не случайность.*

Почему так?

Конечно, странно думать, что разница во времени получается оттого, что Земля «вращается под самолетом». Разумеется, она вращается, но самолет находится в земной атмосфере и поэтому «вращается вместе с ней», точно так же, как идущие люди или едущие автомобили. Истинная причина – устойчивое воздушное течение, попросту говоря – ветер, который постоянно дует на восток в верхних слоях атмосферы. Это течение называется *западным переносом воздушных масс*. Подробнее о западном переносе и причинах, вызывающих его, можно прочесть, например, в Википедии.

Мы можем даже оценить (найти приблизительно) скорость западного переноса на определенных широтах: ведь нам известны расстояния между городами и время в пути. Попробуйте сделать эти приближенные расчеты самостоятельно – они не сложнее задачки на движение для 7 – 8 класса.

---

[1] Дисперсией числового набора называется средний квадрат отклонений чисел от их среднего арифметического. Стандартным отклонением называется квадратный корень из дисперсии. С помощью стандартного отклонения часто (похоже, что и в нашем случае тоже) удается оценить правдоподобность отклонения полученного среднего значения от предполагаемого.

[2] Имеются в виду условные вероятности событий $\delta < 0$ и $\delta > 0$ при условии $\delta \neq 0$.

[3] Это то же самое, что подсчитывать орлы и решки при 67 бросаниях монеты.

II. Задачи

4. Кодовый замок. Петя подходит к двери подъезда с кодовым замком, на замке расположены кнопки с цифрами от 0 до 9. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать три правильные кнопки. Петя не помнит код и пробует по очереди комбинации. На каждую попытку Петя тратит 2 секунды.

а) **(6 класс. 1 балл).** Сколько времени понадобится Пете, чтобы наверняка попасть в подъезд?

б) **(6 класс. 1 балл).** Сколько времени в среднем понадобится Пете?

в) **(6 класс. 1 балл).** Какова вероятность того, что Петя попадет в подъезд менее чем за одну минуту?

Решение: а) Всего возможных одновременных комбинаций из трёх цифр $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$. Таким образом, Петя потратит $120 \cdot 2 = 240$ секунд, то есть 4 минуты.

б) В наилучшем случае Пете понадобится ровно 1 попытка, в наихудшем – все 120. Все комбинации равновозможны, поэтому в среднем Пете понадобится $\frac{120+1}{2} = 60{,}5$ попыток, то есть 121 секунда.

в) Чтобы попасть в подъезд менее чем за минуту, Петя должен справиться не более чем за 29 попыток. Вероятность этого равна $\frac{29}{120}$.

Ответ: а) 4 минуты; б) 2 минуты 1 секунда; в) $\frac{29}{120}$.

5. Первоклассник (6 класс. 2 балла). Максим пойдёт в первый класс 1 сентября 2014 года в возрасте 6 лет, и этот день не будет днём его рождения. Какова вероятность того, что он родился в 2008 году?

Решение. Максим мог родиться в любой день, начиная со 2 сентября 2007 года и заканчивая 31 августа 2008 года. Всего 365 дней, учитывая, что в 2008 году было 29 февраля. Считая, что все дни равновозможны (у нас нет информации, позволяющей думать иначе), находим искомую вероятность:

$$\frac{31+29+31+30+31+30+31+31}{365} = \frac{244}{365} \approx \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{244}{365}$, то есть чуть больше, чем $\frac{2}{3}$.

6. Стратегия великого комбинатора (6 класс. 2 балла). Остап Бендер играет в шахматы с Чемпионом Васюков, Чемпионом России и Чемпионом Мира. По правилам, чтобы стать Абсолютным Чемпионом, Остапу нужно выиграть две игры подряд. Бендер имеет право выбирать, в каком порядке ему играть с соперниками. Какой порядок для Остапа выгоднее?

Решение. Будем считать, что шансы Остапа выиграть у Чемпиона России ниже, чем у Чемпиона Васюков, но выше, чем у Чемпиона Мира.

Обозначим p_1, p_2 и p_3 вероятности выигрыша Остапа у противников в порядке их следования.

Тогда вероятность стать Абсолютным Чемпионом у Остапа равна

$$p_1p_2+(1-p_1)p_2p_3=p_2(p_1+p_3-p_1p_3)=p_2(p_1+p_3)-p_1p_2p_3.$$

Значит, задача сводится к вопросу, в каком порядке должны следовать соперники, чтобы величина $p_2(p_1+p_3)$ оказалась наибольшей в предположении, что Чемпион России играет лучше, чем Чемпион Васюков, но хуже, чем Чемпион Мира.

Поменяем первого и второго соперника местами. Должно выполняться неравенство

$$p_2(p_1+p_3)>p_1(p_2+p_3)\text{, то есть } p_3(p_2-p_1)>0.$$

Значит, второй соперник должен быть слабее первого.

Если мы поменяем местами второго и третьего, аналогично получим, что второй соперник должен быть слабее третьего.

Если же поменять местами первого и третьего, вероятность удачи у Остапа не меняется, поскольку значение выражения $p_2(p_1+p_3)$ не зависит от порядка слагаемых p_1 и p_3 в скобках.

Ответ: в качестве второго соперника Остап должен выбрать Чемпиона Васюков, и неважно, кто будет первым и третьим.

Комментарий. Задачу можно решить качественно совсем без расчётов. Ясно, что решающая партия для Остапа вторая. Если он её проигрывает, то не видать ему заветного титула. Значит, нужно, чтобы вероятность победы во второй партии была наибольшая. Поэтому вторым противником должен быть Чемпион Васюков. А для сражения с сильными соперниками остаётся две независимых попытки. И из соображений симметрии ясно, что их порядок уже не играет роли. В более простом виде задача встречается в книге Чарльза Фредерика Мостеллера «Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями» (М., Наука, 1985), а также в 7 номере журнала «Квантик» за 2013 год (М., МЦНМО, с.7).

7. Мультипликативные кости. Федя предложил Васе сыграть в игру: нужно бросить две игральные кости и перемножить выпавшие числа.

– Самое большое произведение 36, а самое маленькое 1, – заявил Федя. – Давай так: если произведение получилось от 1 до 18, то я выиграл, а если от 19 до 36, то выиграл ты.

а) **(6 класс. 2 балла).** Соглашаться ли Васе на такие условия игры?

б) **(6 класс. 2 балла).** Как изменить границу, чтобы игра стала справедливой?

Решение. а) Нужно пересчитать комбинации из двух костей, при которых в произведении от 1 до 18 и отдельно комбинации, где произведение от 19 до 36. Это можно сделать, например, с помощью таблицы. Видно, что первых больше. Все комбинации равновозможны, поэтому Федя заведомо в лучшем положении. Васе соглашаться не следует.

Первая кость

Вторая кость	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

б) Деление должно проходить по медиане случайной величины «произведение очков». Несложно видеть, что медиана – 10. Справедливой была бы игра, в которой один ставит на произведение очков от 1 до 9, а второй – на произведение от 11 до 36. Если получается ровно 10, то наступает ничья.

8. Акции «Малони и Ко». В понедельник 7 апреля акция Торгового дома «Малони и Ко» стоила 5 анчурийских долларов. Последующие шесть дней акции не падали в цене или даже росли, и к воскресенью 13 апреля цена акции достигла 5 долларов 14 центов. На протяжении всей следующей недели акции не поднимались и даже падали в цене так, что 20 апреля акция снова стоили 5 долларов.

а) **(6 класс. 1 балл).** Приведите пример, как могли изменяться цены, так что средний курс за весь период с 7 по 20 апреля был выше, чем 5 долларов 9 центов, но ниже, чем 5 долларов 10 центов.

б) **(6 класс. 2 балла).** Обозреватель А. утверждает, что средний курс акции в период с 7 по 13 апреля был на 10,5 центов ниже[4], чем средний курс в период с 14 по 20 апреля. Обозреватель Б. говорит, что А. неправ. Так кто же из них прав?

Решение. б) Наименьший средний курс акции в период с 7 по 13 апреля не меньше чем $\frac{5+5+5+5+5+5+5{,}14}{7}=5{,}02$ доллара.

Наибольший средний курс акции в период с 14 про 20 апреля не больше чем $\frac{5{,}14+5{,}14+5{,}14+5{,}14+5{,}14+5{,}14+5}{7}=5{,}12$ доллара. Таким образом, разность между средними курсами не превосходит $5{,}12-5{,}02$ доллара, то есть 10 центов.

Ответ: б) прав Б.

[4] Здесь в условии задачи, к сожалению, была допущена ошибка – вместо слова «ниже» было слово «выше». Это привело к тому, что задача стала другой и менее интересной. Всем, кто ее решил, поставлен за нее наибольший возможный балл.

9. Сонные мухи (7 класс. 1 балл). Однажды в октябре Никита глянул на часы, висящие на стене, и увидел, что на циферблате уснули четыре мухи. Первая спала в точности на отметке 12, а остальные так же точно расположились на цифрах 3, 6 и 9.

– Надо же! Красиво! – восхитился Никита и даже пожалел мух, заметив, что часовая стрелка мухам не грозит, а вот минутная обязательно сметёт их всех по очереди.

Найдите вероятность того, что ровно через 20 минут после того, как Никита глянул на часы, две мухи уже были сметены.

Решение. Событие «сметены ровно 2 мухи» наступает только в том случае, если в момент, когда Петя глядел на часы, минутная стрелка располагалась между 11 и 12 часами, 2 и 3 часами, 5 и 6 часами или 8 и 9 часами. Нетрудно заметить, что в совокупности эти интервалы дают 4 часа, что покрывает ровно $\frac{1}{3}$ циферблата.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

10. Чаепитие Федоры Егоровны. (7 класс. 3 балла). У Федоры Егоровны есть 3 чайные чашки. Однажды она их вымыла и начала новую жизнь. Каждый раз, чтобы выпить чаю, Федора берёт наудачу какую-нибудь чашку, а потом ставит её к остальным, но уже не моет. Найдите вероятность того, что во время пятого чаепития с момента начала новой жизни Федора Егоровна использует последнюю чистую чашку.

Решение. Указанное событие наступит, только если четыре первых раза Федора использовала какие-то две чашки (причем обе хотя бы по разу), а в пятый раз – последнюю чистую чашку. Для определенности пронумеруем чашки. Тогда существует 16 способов четыре раза использовать чашки 1 и 2. При этом два из них не подходят – это способы 1111 и 2222. Значит, всего 14 способов использовать четыре раза ровно две чашки (каждую хотя бы раз). Точно так же, 14 способов четыре раза выпить чаю из чашек 1 и 3 и еще 14 способов использовать чашки 2 и 3. Значит, всего 42 способа использовать ровно две чашки за четыре чаепития и третью чашку – в пятый раз. Общее число способов использовать три чашки пять раз равно $3^5 = 243$. Искомая вероятность равна $\frac{42}{243} = \frac{14}{81}$.

Ответ: $\frac{14}{81}$.

11. Первый туз. В некоторую карточную игру играют вчетвером. Чтобы определить, кому начинать игру, обычно бросают жребий «до первого туза». Всего в колоде 32 карты, от семёрок до тузов. Один из игроков раздаёт всем карты в открытую по очереди по часовой стрелке (себе – последнему), пока кому-то не достанется туз. Этому игроку и предстоит начать игру.

а) **(8 класс. 3 балла)** Для каждого игрока найдите вероятность того, что ему достанется первый туз.

б) **(6 класс. 1 балл).** Как изменить правила, чтобы сделать жребий справедливым?

Решение. а) Конечно считается, что колода хорошо перетасована (перемешана), то есть каждая карта может оказаться на любом из 32 возможных мест с равными шансами.

Присвоим игрокам номера 1, 2, 3 и 4. Раздаёт карты игрок (4), а начинает он с игрока (1). Игрок (1) первым получит туза, если первый туз лежит в колоде на месте 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 или 29.

Туз является первой картой в колоде с вероятностью $\frac{1}{8}$, поскольку всего в колоде карты 8 различных достоинств от семерки до туза.

Первый туз окажется на 5-м месте, если только первые четыре карты – не тузы. Вероятность этого равна

$$\frac{28}{32}\cdot\frac{27}{31}\cdot\frac{26}{30}\cdot\frac{25}{29}\cdot\frac{4}{28}=\frac{1}{8}\cdot\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{31\cdot30\cdot29\cdot28}=\frac{1}{8}\cdot\frac{C_{28}^{4}}{C_{31}^{4}}.$$

Аналогично, первый туз окажется на 9-м месте, если только первые восемь карт – не тузы. Вероятность этого $\frac{1}{8}\cdot\frac{C_{28}^{8}}{C_{31}^{8}}$. И так далее. Суммируя эти вероятности, найдём вероятность того, что начинать игру будет игрок (1):

$$p_1=\frac{1}{8}+\frac{C_{28}^{4}}{8C_{31}^{4}}+\frac{C_{28}^{8}}{8C_{31}^{8}}+\ldots+\frac{C_{28}^{28}}{8C_{31}^{28}}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{7}\frac{C_{28}^{4k}}{C_{31}^{4k}}.$$

Для игрока (2) аналогичный подсчёт дает:

$$p_2=\frac{C_{28}^{1}}{8C_{31}^{1}}+\frac{C_{28}^{5}}{8C_{31}^{5}}+\frac{C_{28}^{9}}{8C_{31}^{9}}+\ldots+\frac{C_{28}^{25}}{8C_{31}^{25}}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{6}\frac{C_{28}^{4k+1}}{C_{31}^{4k+1}}.$$

Обратим внимание на то, что в этой сумме на одно слагаемое меньше, чем в первой. Для игроков (3) и (4) точно так же получаем:

$$p_3=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{6}\frac{C_{28}^{4k+2}}{C_{31}^{4k+2}} \text{ и } p_4=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{6}\frac{C_{28}^{4k+3}}{C_{31}^{4k+3}}.$$

Для расчёта можно использовать любое подходящее средство. Например, бумагу и карандаш, хотя это утомительно. Расчёт в Excel даёт:

$$p_1\approx0{,}3008,\ p_2\approx0{,}2647,\ p_3\approx0{,}2320 \text{ и } p_4\approx0{,}2024.$$

Жребий несправедливый – шансы того, кто раздаёт карты «на первого туза», примерно в полтора раза ниже, чем шансы первого игрока.

б) Простейшее, как нам видится, изменение – сдавать карты до туза пик. Очевидно, если «удачная» карта в колоде единственная (а не четыре), то шансы у всех игроков равны.

Ответ: а) прибл. $0{,}3008,\ 0{,}2647,\ 0{,}2320$ и $0{,}2024$.

Комментарий. Можно почти без вычислений понять, что описанный жребий несправедливый. Представим, что в колоде 1 туз. Тогда шансы у всех одинаковы и равны 0,25. Представим теперь, что в колоде 32 туза. Тогда с вероятностью 1 первый игрок сразу получает туза. Значит, при увеличении числа тузов шансы первого игрока, похоже, растут. Таким образом, при четырёх тузах шансы первого игрока должны быть больше, чем 0,25, а у прочих меньше. Но это не слишком убедительное рассуждение. Проведённый расчёт даёт точное решение задачи.

12. Предсказания (8 класс. 2 балла). В понедельник у Миши пять уроков, а во вторник – шесть. Чтобы определить, на каких уроках непредсказуемые учителя спросят у него домашнее задание, Миша бросает монету 11 раз – по числу возможных неприятностей. Если выпадает орёл, Миша считает, что на этом уроке его спросят, если решка – то не спросят. После уроков во вторник Миша констатировал, что ему удалось угадать 7 раз. Найдите вероятность того, что ровно 3 верных предсказания относились к понедельнику.

Решение. Вероятность угадать или не угадать про какой-то один урок равна 0,5, независимо от того, с какой вероятностью учитель спросит Мишину домашнюю работу.

Мы имеем дело с условной вероятностью пересечения событий A_1 «В понедельник 3 верных предсказания» и A_2 «во вторник 4 верных предсказания» при условии B «всего верных предсказаний 7»:

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2 | B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap B\right)}{\mathrm{P}(B)}$$

События A_1 и A_2 независимы, и их пересечение влечёт за собой B (если A_1 и A_2 верны, то верно B). Поэтому

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2 | B\right) = \frac{\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}\left(A_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(A_2\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{C_5^3 \frac{1}{2^5} \cdot C_6^4 \frac{1}{2^6}}{C_{11}^7 \frac{1}{2^{11}}} = \frac{C_5^3 \cdot C_6^4}{C_{11}^7} = \frac{5}{11}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{11}$.

13. Лиса Алиса и кот Базилио (8 класс. 2 балла). Каждый день кот Базилио и лиса Алиса обходят все 20 дворов столицы Страны Дураков, и в каждом дворе им либо дают, либо не дают один золотой с вероятностью $\frac{1}{2}$. Если к концу дня число выпрошенных золотых чётное, то лиса и кот делят их поровну. Если же оно нечётно, то они делят все монеты, кроме одной, поровну, а последнюю кот Базилио забирает себе как коммерческий директор предприятия. Найдите математическое ожидание числа монет, полученных котом за день.

Решение: пусть X — выручка кота, а Y — выручка лисы. Тогда случайная величина $X+Y$ имеет математическое ожидание 10. Случайная величина $X-Y$ с равными вероятностями принимает значения 0 и 1. Поэтому $\mathrm{E}(X-Y)=0,5$.

Представим X как $\frac{(X+Y)+(X-Y)}{2}$. Получаем:

$$\mathrm{E}X=\frac{\mathrm{E}(X+Y)+\mathrm{E}(X-Y)}{2}=\frac{10+0,5}{2}=5,25.$$

Ответ: $5,25$.

14. Пять костей. Пять игральных костей бросают одновременно. Такой одновременный бросок нескольких костей будем называть *залпом.* Те кости, на которых выпали шестёрки, откладывают в сторону. А остальные бросают ещё раз – опять залпом. Те, что на второй раз не выпали шестёрками, бросают ещё раз и так далее, пока на всех костях не выпадут шестёрки.

а) **(8 класс. 2 балла).** Найдите математическое ожидание общего числа брошенных костей.

б) **(9 класс. 4 балла).** Найдите математическое ожидание общего числа очков, выпавших к моменту, когда все кости выпали шестёрками.

в) **(9 класс. 6 баллов).** Найдите математическое ожидание числа залпов.

Решение. а) Рассмотрим какую-нибудь одну кость и введем специальную случайную величину – *индикатор* I_k ($k=1,2,3,...$), который равен 0, если кость выпала шестёркой прежде, чем её бросили k раз, и 1 в противном случае, то есть если кость участвовала в k-м залпе. Очевидно,

$\mathrm{P}(I_1=1)=1$ (в первом залпе кость точно участвует);

$\mathrm{P}(I_2=1)=\frac{5}{6}$ (во втором залпе кость участвует, только если первый раз не ней выпала не шестёрка);

$\mathrm{P}(I_3=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^2$ (в третьем залпе кость участвует, только если первые два раза на ней не выпадали шестёрки).

И так далее – вероятности $\mathrm{P}(I_k=1)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{5}{6}$:

$$\mathrm{P}(I_k=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}\,I_k=0\cdot\mathrm{P}(I_k=0)+1\cdot\mathrm{P}(I_k=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Обозначим ξ число бросков, в которых участвовала эта кость. Тогда

$$\xi=I_1+I_2+I_3+\ldots .$$

Перейдём к сумме математических ожиданий:

$$\mathrm{E}\,\xi=\mathrm{E}\,I_1+\mathrm{E}\,I_2+\mathrm{E}\,I_3+\ldots=1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-5/6}=6.$$

Поскольку всего таких костей пять, математическое ожидание общего числа брошенных костей равно $5\cdot 6=30$.

Комментарий. Математическое ожидание можно найти и без индикаторов: поскольку вероятность выпасть шестёркой кверху у одной кости равна $\frac{1}{6}$, в среднем, чтобы выбросить шестёрку на этой кости, потребуется шесть бросков: $\mathrm{E}\,\xi=6$. Это – известное свойство геометрического распределения, которому подчиняется случайная величина ξ.

б) Выберем какую-нибудь одну кость и проследим за ней. Общее число выпавших на ней очков (включая шестерку, которая выпадает при последнем броске), обозначим X. Введем индикатор I, который равен 0, если первый бросок дал шестёрку, или 1, если первый бросок не дал шестёрку. Назовём X_1 число очков при первом броске. Если первый бросок окончился не шестёркой, то выпавшее во время всех последующих бросков общее число очков назовем Y. Тогда

$$X=X_1+IY.$$

Заметим, что индикатор I – случайная величина, которая относится только к первому броску, а величина Y определяется исходами всех последующих бросков, но не первого. Поэтому I и Y независимы. Значит,

$$\mathrm{E}\,X=\mathrm{E}\,X_1+\mathrm{E}\,I\cdot\mathrm{E}\,Y.$$

Осталось заметить, что $\mathrm{E}\,X_1 = 3{,}5$, $\mathrm{E}\,I = \mathrm{P}\left(I=1\right) = \dfrac{5}{6}$, а $\mathrm{E}\,Y = \mathrm{E}\,X$, поскольку величины X и Y имеют одно и то же распределение. Значит,

$$\mathrm{E}\,X = 3{,}5 + \frac{5}{6}\mathrm{E}\,X,$$

откуда $\mathrm{E}\,X = 21$.

Всего костей у нас пять, поэтому математическое ожидание общего числа выпавших очков равно

$$5 \cdot 21 = 105.$$

Комментарий. Можно сразу догадаться, что общее число очков будет равно общему числу бросков, умноженному на среднее число очков в каждом броске: $30 \cdot 3{,}5 = 105$. Но такое рассуждение не очень аккуратное. Приведенное решение даёт строгое доказательство этого интуитивно ясного факта.

в) Типичная непростая задача, где снова удобны *индикаторы*. Для общности будем считать, что костей вначале не пять, а n штук.

Пусть ξ_n – общее число залпов, которые потребуются, чтобы на всех n костях выпали шестёрки.

Пусть I_k – индикатор события «В результате первого залпа шестёрки выпали на k костях», где $k = 0,1,\ldots,n$, и пусть после первого залпа осталось m костей ($m = 0,1,\ldots,n$).

Пусть, наконец, η_m – общее число залпов, которые потребуются, чтобы m оставшихся костей выпали шестёрками после того, как первый залп сделан. Очевидно, $\mathrm{E}\,\xi_k = \mathrm{E}\,\eta_k$ для любого $k = 1,\ldots,n$, поскольку величины ξ_k и η_k, хотя и различны, но имеют одинаковое распределение. Также известно, (см. пункт а), что $\mathrm{E}\,\xi_1 = \mathrm{E}\,\eta_1 = 6$.

Если в результате первого залпа шестёрок не выпало вовсе, то во втором залпе участвуют снова все n костей, и в этом случае

$$\xi_n = 1 + \eta_n = 1 + I_0\eta_n.$$

Если первый залп дал одну шестёрку, то во втором залпе участвует $n-1$ костей, и поэтому

$$\xi_n = 1 + \eta_{n-1} = 1 + I_1\eta_{n-1}.$$

Рассуждая так и далее, напишем формулу, учитывающую все случаи:

$$\xi_n = 1 + I_0\eta_n + I_1\eta_{n-1} + I_2\eta_{n-2} + \ldots + I_{n-1}\eta_1.$$

Перейдем к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}\,\xi_n = 1 + \mathrm{E}\left(I_0\eta_n\right) + \mathrm{E}\left(I_1\eta_{n-1}\right) + \mathrm{E}\left(I_2\eta_{n-2}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(I_{n-1}\eta_1\right).$$

Заметим, что величина η_k связана с опытом, не включающим первый залп, а величина I_{n-k} – индикатор события, связанного только с первым залпом. Следовательно, эти две случайные величины независимы. Поэтому

$$\mathrm{E}\,\xi_n = 1 + \mathrm{E}\,I_0\,\mathrm{E}\,\eta_n + \mathrm{E}\,I_1\,\mathrm{E}\,\eta_{n-1} + \mathrm{E}\,I_2\,\mathrm{E}\,\eta_{n-2} + \ldots + \mathrm{E}\,I_{n-1}\,\mathrm{E}\,\eta_1.$$

Вводя короткое обозначение ε_k для $\mathrm{E}\,\xi_k$ (и, тем самым, для $\mathrm{E}\,\eta_k$), получаем:

$$\varepsilon_n = 1 + \varepsilon_n \mathrm{E}\,I_0 + \varepsilon_{n-1}\mathrm{E}\,I_1 + \varepsilon_{n-2}\mathrm{E}\,I_2 + \ldots + \varepsilon_1 \mathrm{E}\,I_{n-1} = 1 + \varepsilon_n \mathrm{E}\,I_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{n-k}\cdot \mathrm{E}\,I_k\,,$$

откуда

$$\varepsilon_n\left(1-\mathrm{E}\,I_0\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{n-k}\cdot \mathrm{E}\,I_k$$

Осталось выяснить, чему равны $\mathrm{E}\,I_k$. Математическое ожидание $\mathrm{E}\,I_k$ равно вероятности получить ровно k шестёрок при первом залпе:

$$\mathrm{E}\,I_k = C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k 5^{n-k}}{6^n}.$$

В частности, $\mathrm{E}\,I_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Поэтому

$$\varepsilon_n = \frac{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{C_n^k 5^{n-k}\varepsilon_{n-k}}{6^n}}{1-\left(5/6\right)^n} = \frac{6^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}C_n^k 5^{n-k}\varepsilon_{n-k}}{6^n-5^n}. \qquad (14.1)$$

Получилась рекуррентная формула для вычисления ожиданий. Начав с $\varepsilon_1 = \mathrm{E}\,\xi_1 = 6$, последовательно найдем:

$$\mathrm{E}\,\xi_2 = \varepsilon_2 = \frac{6^2 + C_2^1\cdot 5\cdot 6}{6^2-5^2} = \frac{36+60}{36-25} = \frac{96}{11},$$

$$\mathrm{E}\,\xi_3 = \varepsilon_3 = \frac{6^3 + C_3^1\cdot 5^2\cdot\frac{96}{11} + C_3^2\cdot 5\cdot 6}{6^3-5^3} = \frac{216+3\cdot 25\cdot\frac{96}{11}+3\cdot 5\cdot 6}{216-125} = \frac{10566}{1001}.$$

И так далее. Лучше воспользоваться калькулятором или компьютером. Округляя до сотых получаем:

$$\varepsilon_4 = 11{,}93,\ \varepsilon_5 = 13{,}02\,.$$

Ответ: а) 30; б) 105; в) прибл. 13,02.

Комментарий. Здесь можно провести качественное рассуждение, заранее понимая, что оно даст лишь приблизительный результат. Для одной кости среднее число залпов 6. При каждом залпе в среднем шестая часть всех костей даёт шестёрку и выбывает из игры. Значит, при увеличении числа костей в $6/5$ раза (то есть в 1,2 раза) число залпов в среднем должно увеличиваться на единицу. Для n костей число залпов должно быть близко к $6+\log_{1{,}2} n$, то есть

$$\mathrm{E}\,\xi_n \approx 6 + \frac{\ln n}{\ln 1{,}2}. \qquad (14.2)$$

Если провести расчёты по формуле (14.1) для достаточно больших n, можно убедиться, что между (14.1) и (14.2) наблюдается хорошее согласие.

15. Благородные девицы. Благородные девицы пошли в театр. Девиц всего n, и билеты у всех на один ряд, в котором ровно n кресел. Если девице, чтобы занять свое место, нужно пройти мимо уже сидящей девицы, то последняя должна вежливо встать, чтобы пропустить подругу.
а) **(8 класс. 2 балла).** Найдите математическое ожидание числа вставаний.
б) **(9 класс. 5 баллов).** Найдите математическое ожидание числа тех, кому не придётся встать ни разу.

Решение. а) Присвоим девицам номера, такие же, как номера назначенных им кресел и рассмотрим пристально двух каких-нибудь девиц. Одна из них должна пропустить вторую, только если вторая проходит дальше, а в очереди идёт позже первой.

Значит, число вставаний будет равно количеству пар девиц, где девица с большим номером оказалась в очереди прежде девицы с меньшим номером. Такую пару назовем *беспорядком*. Например, на рисунке девицы 1 и 2 образуют беспорядок, поскольку девица 2 идёт прежде девицы 1. Другой беспорядок – пара девиц 1 и 3. Следовательно, случайная величина X «число вставаний» меняется от 0 до C_n^2 (наибольшее возможное число беспорядков равно числу всевозможных пар девиц).

Рассмотрим какую-нибудь очередь из всех девиц. Предположим, что в этой очереди K беспорядков. Если эту очередь «развернуть задом наперед», получится очередь, в которой каждый беспорядок станет «порядком» и наоборот. Поэтому в развёрнутой очереди $C_n^2 - K$ беспорядков.

Следовательно, очередей с K беспорядками, столько же, сколько очередей с $C_n^2 - K$ беспорядками, а поэтому вероятности K и $C_n^2 - K$ беспорядков равны. Таким образом, распределение величины X симметрично, и потому $\mathrm{E}\,X = \dfrac{0 + C_n^2}{2} = \dfrac{n(n-1)}{4}$.

Комментарий. Другое решение можно построить, если использовать индикаторы беспорядков: индикатор $I_{i,j}$ ($i < j$) равен 1, если девица j должна пропустить девицу i и 0 в противном случае. Очевидно, $\mathrm{E}\,I_{i,j} = \mathrm{P}\left(I_{i,j}\right) = \dfrac{1}{2}$. Суммируя ожидания всевозможных индикаторов (их ровно C_n^2), получим:

$$\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,I_{1,2} + \mathrm{E}\,I_{1,3} + \ldots + \mathrm{E}\,I_{i,j} + \ldots \mathrm{E}\,I_{n-1,n} = \frac{1}{2} \cdot C_n^2 = \frac{n(n-1)}{4}.$$

б) Назовём X_n число тех из n девиц, кому не придется вставать ни разу. Первой в очереди стоит какая-то барышня (пусть, для определённости, Сонечка). Среди прочих $n-1$ девиц число тех, кому не придется вставать, обозначим X_{n-1}. Очевидно, $X_n = X_{n-1} + I$, где

$$I = \begin{cases} 1, \text{ если Сонечке вставать не придётся,} \\ 0, \text{ если Сонечке придётся кого-то пропустить.} \end{cases}$$

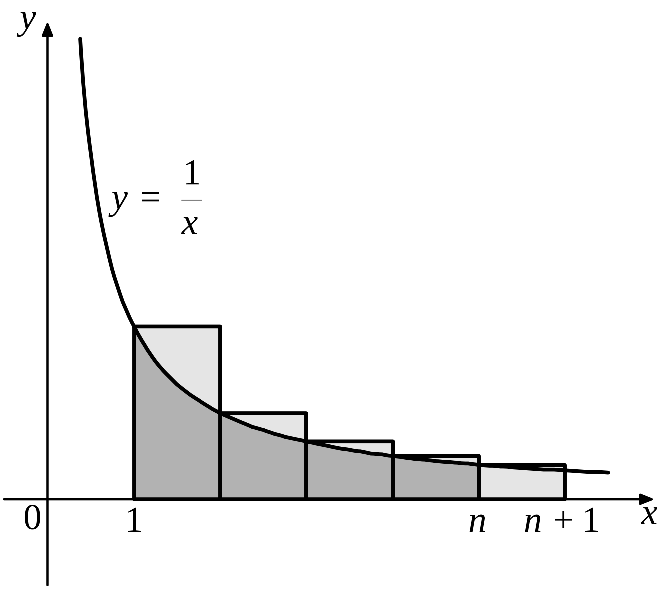
– индикатор события «Сонечке вставать не придётся». Сонечке не нужно никого пропускать, только если у неё билет на первое место. Вероятность этого равна $\mathrm{P}(I=1) = \frac{1}{n}$. Поэтому $\mathrm{E}\,I = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}\,X_{n-1} + \mathrm{E}\,I = \mathrm{E}\,X_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Получилась рекуррентная формула, связывающая искомое ожидание с таким же ожиданием для группы девиц без Сонечки. Осталось заметить, что $\mathrm{E}\,X_1 = 1$, поскольку если Сонечка одинока и место в ряду тоже только одно, то Сонечке точно не придётся никого пропускать. Значит,

$$\mathrm{E}\,X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}. \qquad (15.1)$$

Комментарий. Сумма (15.1) называется n*-ым гармоническим числом* и обозначается H_n. Оно равно площади столбчатой фигуры, изображенной на рисунке. Видно, что площадь под графиком функции $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1; n]$ незначительно отличается от H_n. Это приближение выражается равенством



$$\lim_{n\to+\infty}\left(H_n - \ln n\right) = \gamma.$$

Число γ называют *постоянной Эйлера-Маскерони.* Десятичная запись γ начинается так[5]:

$$\gamma = 0{,}57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$$

Даже при не очень больших n можно с приемлемой погрешностью считать, что

$$H_n \approx \ln n + 0{,}577.$$

Уже при $n = 10$ ошибка составляет не более 0,05. Оценку можно улучшить разными способами. Например, можно положить

$$H_n \approx \ln(n + 0{,}5) + 0{,}577.$$

[5] Неизвестно, рационально ли это число. Известно только, что если оно рационально, то оно представляется несократимой дробью, знаменатель которой не меньше 10^{242080}.

Кстати, из сделанных оценок следует, что число непотревоженных девиц весьма мало по сравнению с общим их числом, ведь логарифм n растет намного медленнее, чем само n. Мы получили вполне согласующийся с нашим театральным опытом результат: редко удается занять своё место так, чтобы больше не вскакивать.

Ответ: а) $\frac{n(n-1)}{4}$; б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ или приближенно $\ln n+0,577$.

16. Контрольная цифра (8 класс. 3 балла). Простоквашинская телефонная компания «Просто-Телеком» использует трёхзначные телефонные номера. Оборудование старое, поэтому при соединении возможны ошибки в отдельных цифрах передаваемого номера абонента – каждая цифра независимо от других с вероятностью $p=0,02$ может быть заменена какой-то другой случайной цифрой. Для уменьшения вероятности неверного соединения компания использует следующее правило: первая цифра номера всегда равна остатку от деления на 10 суммы двух остальных цифр. Например, возможны номера 000 и 156, а номер 234 невозможен. Если при соединении контрольная цифра неверная, выдаётся сообщение об ошибке. Найдите вероятность того, что, несмотря на принятые меры, ошибочное соединение состоится.

Решение. Номера, удовлетворяющие правилу, будем называть *правильными*. Задача состоит в том, чтобы, несмотря на ошибочные цифры, номер оказался правильным.

Если две цифры известны, то третья цифра определяется однозначно. Поэтому не будем рассматривать первую цифру отдельно, а будем считать, что все цифры равноправны.

Ошибочный номер не может быть правильным, если он отличается от верного только одной цифрой. Отличия в двух или трёх цифрах возможны.
Для нахождения вероятности того, что ошибочный номер окажется правильным, заметим, что вероятности двух или трёх ошибочных цифр равны соответственно

$$C_3^2p^2(1-p) \text{ и } C_3^3p^3.$$

Обозначим r_2 вероятность того, что номер оказался правильным при условии, что в нём ровно две ошибочные цифры. Аналогично, r_3 – вероятность того, что номер с тремя ошибочными цифрами оказался правильным. Тогда полная вероятность того, что ошибочный номер правильный, равна

$$C_3^2p^2(1-p)r_2+C_3^3p^3r_3.$$

Пусть ошибочных цифр две. Какой бы ни оказалась первая, вторая определяется однозначно: событию «ошибочный номер правильный» благоприятствует только одно значение второй цифры из девяти ошибочных возможных. Поэтому, если зафиксированы две ошибочные цифры, то номер окажется правильным с вероятностью $r_2=\frac{1}{9}$.

Поясним сказанное на примере. Пусть в номере 376 ошибки случились, для определённости, в 2-й и 3-й цифрах. Предположим, что 2-я цифра по ошибке стала цифрой 5. Тогда получаем номер 35A, где A может принимать с равными шансами одно из 9 значений (все, кроме 6). Но правильным номер будет, только если $\mathrm{A}=8$, поскольку только в этом случае сумма двух последних цифр будет оканчиваться цифрой 3.

Пусть ошибочных цифр три. Какова бы ни была первая ошибочная цифра, событию «номер окажется правильным» благоприятствует 8 значений второй цифры из 9 равновозможных ошибочных значений, а для третьей цифры – только 1 из 9. Поэтому $r_3=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}$.

Снова поясним на примере. Пусть в номере 376 первая цифра по ошибке стала цифрой 2. Тогда получился номер 2AB. Цифра A ошибочная, поэтому A может принять с равными шансами любое из 9 значений (все цифры, кроме 7). Но если A примет значение 6, то номер будет правильным, только если B = 6, но это невозможно, потому что B – тоже ошибочная цифра и не может равняться 6. Значит, событию «номер правильный» благоприятствуют 8 значений A из 9 возможных ошибочных и только одно значение B также из 9 возможных. Вероятность этого $\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}$.

Следовательно,

$$C_3^2p^2(1-p)r_2+C_3^3p^3r_3=3\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98\cdot\frac{1}{9}+1\cdot 0{,}02^3\cdot\frac{8}{81}\approx 0{,}000131.$$

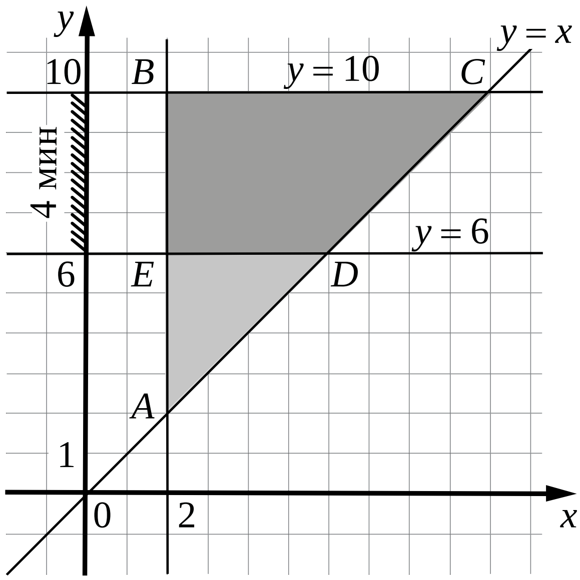
Ответ: прибл. $0{,}000131$.

17. Закрытое сельпо (8 класс. 3 балла). Ровно в полдень Анна Кузьминична выглянула в окно и увидела как Клава, продавщица сельпо, уходит на перерыв. В две минуты первого Анна Кузьминична снова посмотрела в окно – перед закрытым магазином еще никого не было. Клава отсутствовала ровно 10 минут, а когда она вернулась, нашла, что перед дверью топчутся Иван и Фома, очевидно, пришедший позже Ивана. Найдите вероятность того, что Фоме пришлось ждать открытия магазина не более 4 минут.

Решение. Разумно считать, что время появления каждого покупателя распределено равномерно на допустимом промежутке. Это можно понимать так: вероятность появления в каждую минуту (секунду) одна и та же. Более точно – *вероятность появления в какой-то интервал времени пропорциональна длительности этого интервала*.

Будем отсчитывать время в минутах от полудня, приняв его за 0, и обозначим x время появления Ивана, а время прихода Фомы назовем y.

По условию $2 < x < y < 10$. Изобразим соответствующую фигуру в системе координат xOy. Получается треугольник ABC.



Нужно найти вероятность события $(x \geq 6)$. Отметим его на рисунке и увидим, что внутри треугольника оно изображается трапецией $EBCD$. Разными способами легко найти, что

$$\mathrm{P}(x \geq 6) = \frac{S_{EBCD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

18. **Дневник погоды (8 класс. 5 баллов).** Весь март семиклассник Иванов вёл дневник наблюдений за погодой. Каждый день ровно в 3 часа дня он выглядывал в кухонное окно, смотрел на уличный термометр и записывал в дневник температуру воздуха. После статистической обработки получилось:

- Средняя температура за март: $\bar{x} = 0$ (градусов Цельсия).
- Медиана: $m = 4$ (градуса Цельсия).
- Дисперсия: $S^2 = 15{,}917$ (вероятно, квадратных градусов или градусов Квадратного Цельсия, но это Иванова не волновало).

Учительница географии была очень довольна и поставила Иванову пять. Учитель математики тоже был доволен Ивановым и велел ему идти искать ошибку. Почему учитель математики решил, что Иванов ошибся?

Решение. Вероятно, учитель математики знал, что для любого числового набора медиана удалена от среднего арифметического не больше чем на одно стандартное отклонение:

$$|\bar{x} - m| \leq \sqrt{S^2}, \text{ откуда } (\bar{x} - m)^2 \leq S^2.$$

Докажем это. Пусть набор состоит из чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда

$$|\bar{x} - m| = \left| \frac{x_1 - m}{n} + \frac{x_2 - m}{n} + ... + \frac{x_n - m}{n} \right| \leq \frac{|x_1 - m| + |x_2 - m| + ... + |x_n - m|}{n}.$$

Это следует из неравенства треугольника – модуль суммы чисел не больше, чем сумма их модулей, каковы бы ни были эти числа. *Средний модуль отклонения от медианы*, который стоит в правой части, *не больше среднего модуля отклонения от любого другого числа*, например, от среднего арифметического $\bar{x}$. Доказательство этого факта можно найти в решении задания 14 олимпиады за 2010 год (http://www.mccme.ru/terver/Solutions2010.pdf). Получаем:

$$\left|\bar{x}-m\right| \le \frac{\left|x_1-m\right|+\left|x_2-m\right|+\ldots+\left|x_2-m\right|}{n} \le \frac{\left|x_1-\bar{x}\right|+\left|x_2-\bar{x}\right|+\ldots+\left|x_2-\bar{x}\right|}{n}.$$

Осталось применить неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным (иногда его называют неравенством Коши):

$$\left|\bar{x}-m\right| \le \frac{\left|x_1-\bar{x}\right|+\left|x_2-\bar{x}\right|+\ldots+\left|x_n-\bar{x}\right|}{n} \le \sqrt{\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2}{n}} = S.$$

Поэтому $\left(\bar{x}-m\right)^2 \le S^2$.

Подставляя известные числа, получаем: $\left(0-4\right)^2 < 15{,}917$. Это неверно. Значит, Иванов где-то ошибся.

19. Пилюли. 28 февраля доктор прописал Рассеянному Математику пилюли от рассеянности, которые надо принимать один раз в день после обеда. Математик купил две баночки, в каждой по 10 пилюль. Каждый день, начиная с 1 марта, Математик берёт с собой на работу одну из баночек (выбирая её случайным образом), после обеда достаёт из кармана баночку и принимает пилюлю.

а) **(9 класс. 4 балла).** Найдите вероятность того, что 14 марта Математик первый раз обнаружит, что в кармане лежит пустая баночка.

б) **(9 класс. 4 балла).** Найдите математическое ожидание числа пилюль, которые Математик принял к тому моменту, как обнаружил, что баночка пуста.

Решение. а) Указанное событие наступит, только если Математик за первые 13 дней марта съел 10 пилюль из одной баночки и 3 пилюли из другой, а 14 марта случайно взял с собой пустую баночку. Эта вероятность равна

$$2\cdot C_{13}^{3}\frac{1}{2^{13}}\cdot\frac{1}{2} = C_{13}^{3}\frac{1}{2^{13}} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{6}\cdot\frac{1}{2^{13}} = \frac{143}{4096} \approx 0{,}035.$$

б) Пусть случайная величина X – число пилюль, принятых Математиком к моменту, когда баночка оказалась пуста. Рассуждая как в пункте а), получим:

$$\mathrm{P}\left(X=k\right) = C_{k}^{k-10}\frac{1}{2^{k}},$$

где $k = 10, 11, \ldots, 20$. Тогда

$$\mathrm{E}\,X = 10C_{10}^{0}\frac{1}{2^{10}} + 11C_{11}^{1}\frac{1}{2^{11}} + \ldots + 20C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}.$$

Эту сумму можно вычислить непосредственно на компьютере (получится примерно 17,3), но все же мы попробуем ее упростить.

С одной стороны,

$$\mathrm{E}\,X-10=0\cdot C_{10}^{0}\frac{1}{2^{10}}+1\cdot C_{11}^{1}\frac{1}{2^{11}}+2\cdot C_{12}^{2}\frac{1}{2^{12}}+\ldots+10\cdot C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}=$$

$$=\frac{11!}{0!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{11}}+\frac{12!}{1!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{12}}+\frac{13!}{2!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{12}}+\ldots+\frac{20!}{9!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{20}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(11C_{10}^{0}\frac{1}{2^{10}}+12C_{11}^{1}\frac{1}{2^{11}}+13C_{12}^{2}\frac{1}{2^{12}}+\ldots+20C_{19}^{9}\frac{1}{2^{19}}\right).$$

С другой стороны,

$$\mathrm{E}\,X+1=11C_{10}^{0}\frac{1}{2^{10}}+12C_{11}^{1}\frac{1}{2^{11}}+\ldots+20C_{19}^{9}\frac{1}{2^{19}}+21C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}.$$

Из этих двух равенств получаем:

$$\mathrm{E}\,X-10=\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\,X+1-21\cdot C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}\right),\text{ откуда }\mathrm{E}\,X=21\left(1-C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}\right)\approx 17{,}3.$$

Ответ: а) прибл. $0{,}035$; б) прибл. $17{,}3$.

Комментарий 1. Пользуясь формулой Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$, заменим выражение $C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}$ величиной $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (проверьте). Тогда получаем: $\mathrm{E}\,X\approx 21\left(1-\frac{1}{\sqrt{10\pi}}\right)\approx 17{,}25$. Согласие удовлетворительное. Легко обобщить задачу на произвольное число пилюль в баночке, поставив n вместо 10.

Комментарий 2. Видно, что выбирая каждый день баночки наугад, Математик, скорее всего, успеет принять довольно много пилюль. Может быть даже все – величина 17,3 ненамного меньше чем 20. Но чтобы составить более определенное представление, нужно знать не только ожидание, но и дисперсию, которую мы не искали. Можете сделать это самостоятельно.