11 класс, второй день

1. *Ответ.* -5 или $-3{,}2$.

Решение. Пусть $a_1 = b_1 = a \neq 0$, разность арифметической прогрессии равна d, а знаменатель геометрической равен q. Поскольку прогрессии непостоянны, $d \neq 0$ и $q \neq 1$. Возможны два случая.

1) Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая. Тогда по условию получаем $a + d = 2aq$, $a + 3d = 8aq^3$, или $d = a(2q-1)$, $3d = a(8q^3-1) = d(4q^2+2q+1)$, $2q^2 + q - 1 = 0$, откуда $q = 1/2$ или $q = -1$. Если $q = 1/2$, то $d = a(2q-1) = 0$, что по условию невозможно. Если $q = -1$, то $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{a+2d}{aq^2} = -5$.

2) Пусть теперь (a_n) — геометрическая, а (b_n) — арифметическая прогрессия. Тогда $2(a+d) = aq$, $8(a+3d) = aq^3$, поэтому $2d = a(q-2)$, $24d = a(q^3-8) = 2d(q^2+2q+4)$, $q^2 + 2q - 8 = 0$, откуда $q = 2$ или $q = -4$. В первом случае снова $d = 0$, что противоречит условию, а во втором $q = -4$, $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{aq^2}{a+2d} = -\frac{16}{5}$.

2. *Ответ.* Нет.

Решение. Предположим, что такие числа x и y существуют. Тогда они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x \cdot \lg y, \\ \lg(x-y) = \frac{\lg x}{\lg y}. \end{cases}$$

Логарифм в левой части второго уравнения определен при $x > y$. Если $0 < y < x \leqslant 1$, то левая часть второго уравнения отрицательна, а правая часть неотрицательна — получаем противоречие. Если $0 < y < 1$ и $x \geqslant 1$, то левая часть первого уравнения положительна, а правая часть неположительна, снова противоречие.

Пусть $x > y > 1$. В этом случае все логарифмы положительны. Сложим уравнения системы и применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\lg(x^2 - y^2) = \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg x \cdot \lg y + \frac{\lg x}{\lg y} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{(\lg x)^2} = 2 \lg x = \lg x^2.$$

Отсюда $x^2 - y^2 \geqslant x^2$, что при положительном y невозможно.

Значит, Незнайка не сможет подобрать числа x и y, удовлетворяющие одновременно обоим уравнениям системы.

3. *Ответ.* Да, может.

Решение. Первый способ. Докажем, что Ниро Вульф заведомо сможет найти преступника за 12 дней. Людей, замешанных в деле, будем называть подозреваемыми. Сопоставим каждому из 80 подозреваемых свой упорядоченный набор (a, b, c, d) из четырех не обязательно различных цифр a, b, c и d, каждая из которых может принимать значения 0, 1 или 2. Это возможно, поскольку всего таких различных наборов $3^4 = 81$. Пусть в день расследования под номером k ($k = 1, 2, \ldots, 12$) Ниро Вульф пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, набор цифр которых удовлетворяет k-му из равенств: $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $b = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$, $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$. Тогда в один из этих дней он пригласит к себе свидетеля, но при этом не пригласит преступника, так как их наборы отличаются хотя бы в одной цифре. Значит, преступление будет раскрыто за 12 дней.

Второй способ. Разобьем подозреваемых на 16 групп по 5 человек. При этом каждой из групп сопоставим свой упорядоченный набор (a, b, c, d) из четырех не обязательно различных цифр a, b, c и d, каждая из которых может принимать значения 0 или 1 (это возможно, поскольку всего таких различных наборов $2^4 = 16$), а ее членов занумеруем числами от 1 до 5.

Пусть в день расследования под номером k ($k = 1, \ldots, 8$) Ниро Вульф пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, набор цифр которых удовлетворяет k-му из равенств: $a = 0$, $a = 1$, $b = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $d = 1$.

Если преступник и свидетель попали в разные группы, то преступление будет раскрыто в один из этих дней, так как наборы цифр группы свидетеля и группы преступника отличаются хотя бы в одной цифре.

Предположим, что свидетель находится в одной группе с преступником. Обозначим через m и n номера свидетеля и преступника в этой группе соответственно. Пусть на 9-й день Ниро Вульф пригласит из каждой группы подозреваемых с номерами 1 и 2, на 10-й день — подозреваемых с номерами 3 и 4, на 11-й день — подозреваемых с номерами 1, 3 и 5, на 12-й день — подозреваемых с номерами 2, 4 и 5. Тогда найдется один из этих дней, в который из каждой группы были приглашены подозреваемые с номером m, но при этом не были приглашены подозреваемые с номером n. Значит, в этот день преступление будет раскрыто.

Третий способ. Покажем, что Ниро Вульф сможет найти преступника даже за 9 дней. Для этого сопоставим каждому подозреваемому свой код — упорядоченный набор из девяти цифр, четыре из которых единицы, а пять нули (это можно сделать, так как всего таких кодов $C_9^4 = 126 > 80$).

Пусть Ниро Вульф в k-й день ($k = 1, 2, \ldots, 9$) пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, k-я цифра кода которых равна 1. Поскольку все коды содержат ровно по 4 единицы, найдется такое число m от 1 до 9, что на m-м месте у свидетеля стоит единица, а у преступника — ноль. Значит, в m-й день свидетель будет приглашен к Ниро Вульфу без преступника, и преступление будет раскрыто.

Комментарий. Пользуясь методом, использованным в третьем способе решения, можно показать, что за 12 дней детектив сможет раскрыть дело, если в нем замешаны не более $C_{12}^6 = 924$ подозреваемых.

Более того, эта оценка точная, что вытекает из следующего факта. Пусть A — множество всех подмножеств некоторого n-элементного множества. Рассмотрим такое подмножество B множества A, что никакие два элемента из B не вложены друг в друга (такое подмножество B называется *антицепью*). Доказанная в 1928 году теорема Шпернера [1] утверждает, что максимальное число элементов, которое может содержать B, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Здесь $\lfloor n/2 \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$.

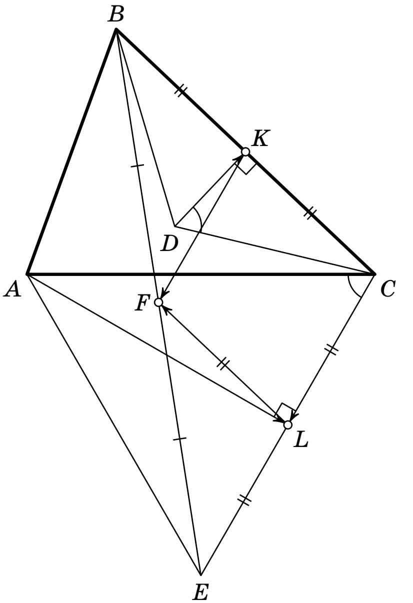
Из этой теоремы следует, что максимальное число подозреваемых, среди которых заведомо можно выявить преступника за n дней, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Действительно, сопоставим каждому из подозреваемых код из нулей и единиц длины n, в котором на k-м месте стоит 1, если в k-й день он был приглашен к Ниро Вульфу, и 0 в противном случае. Такой код однозначно определяет подмножество дней, в которые подозреваемый побывал у детектива. Чтобы дело было раскрыто, в какой-то день свидетель должен побывать у Ниро Вульфа без преступника. Это произойдет, если существует такое число k ($k = 1, 2, \ldots, n$), что на k-м месте в коде свидетеля стоит 1, а в коде преступника стоит 0. Максимальное число кодов, при котором это можно гарантировать, в соответствии с теоремой Шпернера как раз равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (при этом в каждом коде будет ровно $\lfloor n/2 \rfloor$ единиц).

Из полученного результата можно сделать и такой вывод: минимальное число дней, за которое можно заведомо выявить преступника среди 80 подозреваемых, равно девяти, так как за 8 дней преступника можно найти лишь среди не более $C_8^4 = 70$ человек.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Sperner's_theorem.

4. *Решение.* Без ограничения общности будем считать, что вершины A, B, C треугольника ABC расположены в указанном порядке по часовой стрелке (см. рисунок на с. 38). Обозначим через K и L середины отрезков BC и CE соответственно. Тогда $\angle DKC = \angle CLA = 90^\circ$ и $\angle CDK = \angle ACL = 60^\circ$. Следовательно,

$$\frac{CK}{DK} = \frac{AL}{CL} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$



Значит, если вектор $\overrightarrow{DK}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{CK}$. Аналогично, если вектор $\overrightarrow{CL}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{AL}$. По теореме о средней линии для треугольника BCE имеем $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{LF}$ и $\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{CL}$. Поэтому при повороте на 90° против часовой стрелки и последующем умножении на $\sqrt{3}$ вектор $\overrightarrow{DK}$ перейдет в равный вектору $\overrightarrow{LF}$, вектор $\overrightarrow{KF}$ — в равный вектору $\overrightarrow{AL}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KF}$ при таком преобразовании перейдет в равный вектору $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LF}$. Значит, векторы $\overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{AF}$ перпендикулярны, т. е. $\angle AFD=90^\circ$. Что и требовалось доказать.

5. *Ответ*. 2 и 5.

Решение. Занумеруем строки (снизу вверх) и столбцы (справа налево) числами от 0 до 2016, а через $a_{i,j}$ обозначим цифру, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. При такой нумерации строк и столбцов цифры рассматриваемых чисел, стоящие в младших разрядах, имеют меньший номер строки (столбца).

Если через v_i обозначить число, записываемое цифрами i-й строки, а через w_j — число, записываемое цифрами j-го столбца, то $v_i = \sum\limits_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j}$, $w_j = \sum\limits_{i=0}^{2016} 10^i a_{i,j}$.

Покажем сначала, что описанная в условии задачи ситуация возможна для $p = 2$ и $p = 5$. Пусть, например, $a_{i,j} = 1$ при всех i, $j \geqslant 1$ (эти цифры можно выбрать и любыми другими), $a_{0,2016} = 1$, а остальные цифры равны p. Тогда все числа, читаемые по строкам и столбцам, кроме w_{2016}, заканчиваются на p и, как следствие, делятся на p, а w_{2016} заканчивается на 1 и поэтому на p не делится.

Теперь докажем, что для всех других p описанная ситуация невозможна. Предполагая противное, рассмотрим величину

$$S = \sum_{i,j=0}^{2016} 10^{i+j} a_{i,j}.$$

С одной стороны, она равна

$$S = \sum_{i=0}^{2016} 10^i \sum_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j} = \sum_{i=0}^{2016} 10^i v_i.$$

С другой стороны, абсолютно аналогично получаем

$$S = \sum_{j=0}^{2016} 10^j w_j.$$

Если все числа v_i, w_j (i, $j = 0, 1, 2, \ldots, 2016$), кроме одного, делятся на p, а оставшееся на p не делится, то в одной из двух последних сумм все слагаемые делятся на p (значит, S делится на p), а в другой сумме все слагаемые, кроме одного, делятся на p, а оставшееся, в силу взаимной простоты p и степеней десятки, на p не делится (значит, S не делится на p). Противоречие.