X ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ
ОСНОВНОЙ ТУР. 19 ДЕКАБРЯ 2016 Г. – 22 ЯНВАРЯ 2017 Г.

Задания

I. Эссе

1. Сколько в стране стульев? Илья Ильф и Евгений Петров посвятили статистике вступление к одной из глав романа «Двенадцать стульев».

«От статистики не скроешься никуда… Она… знает даже, сколько в стране статистиков. И одного она не знает. Не знает она, сколько в СССР стульев. Стульев очень много».

Найдите способ оценить число стульев в России в настоящее время. Эта задача относится к так называемым «вопросам Ферми». Ферми – американский физик, который любил озадачивать своих студентов, предлагая им оценить количество чего-нибудь без исходных данных. Исходя только из опыта и здравого смысла. Наиболее известный вопрос Ферми: сколько в мире настройщиков пианино. Мы не спрашиваем про настройщиков пианино. Наш вопрос более будничный: сколько в России стульев?

2. Теорема о бесконечных обезьянах. Если посадить обезьяну за пишущую машинку и заставить ее случайно и беспорядочно бить по клавишам, то рано или поздно она напечатает любой наперед заданный текст.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_бесконечных_обезьянах

С помощью несложных расчётов можно оценить вероятность того, что обезьяна, начиная с определённого момента, нажмёт подряд все нужные буквы в нужном порядке.

Предположим, что такой эксперимент проводится в России и в Англии. У первой обезьяны клавиатура с русскими буквами и знаками препинания, а у второй – клавиатура с латинскими буквами и знаками препинания. От обезьяны из России ждут полный текст романа «Преступление и наказание», а от обезьяны из Англии – текст перевода этого романа на английский язык. Какая обезьяна, скорее всего, справится быстрее? Если возможно, оцените время, которое потребуется каждой обезьяне. Все нужные дополнительные предположения сделайте самостоятельно.

3. Систематическая ошибка выжившего. Вы не знаете что это? Узнайте:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Систематическая_ошибка_выжившего

Ошибок выжившего гораздо больше, чем примеров, которые можно найти в интернете. Люди совершают подобные ошибки постоянно. Попробуйте найти и описать свой пример. Чем подробнее вы опишете ситуацию и объясните, в чем ошибочность заключений – тем интереснее. Может быть, вы сумеете исправить ошибку выжившего для вашей ситуации подобно тому, как это сделал Абрахам Вальд.

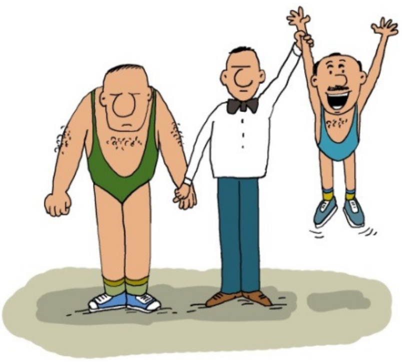
II. Задачи

4. Солнечная долина (от 6 класса, 1 балл). В Солнечной долине 10 посёлков. Однажды статистики долины провели исследование численности жителей в посёлках. Обнаружили следующее.

1. Число жителей в любых двух посёлках долины отличается не более чем на 100 человек.
2. В посёлке Знойное ровно 1000 жителей, что превышает среднюю численность населения посёлков долины на 90 человек.

Сколько жителей в посёлке Радужный, который также расположен в Солнечной долине?

5. Разноцветные шары (от 6 класса, 1 балл). В красном ящике 100 красных шаров, а в зелёном ящике – 100 зелёных шаров. Восемь красных шаров переложили в зелёный ящик, а потом столько же шаров переложили из зелёного ящика в красный. Шары в ящиках хорошенько перемешали. Что теперь больше: вероятность вытащить наудачу из красного ящика зелёный шар или из зелёного ящика красный?



6[1]. Турнир. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. В любом поединке двух борцов всегда побеждает тот, кто сильнее. В первом туре борцы разбились на случайные пары и провели поединки. Для второго тура борцы ещё раз разбиваются на случайные пары соперников (может случиться, что какие-то пары повторятся). Приз получает тот, кто выиграет оба поединка. Найдите:

а) **(от 6 класса, 1 балл)** наименьшее возможное число призёров турнира;

б) **(от 8 класса, 2 балла)** математическое ожидание числа призеров турнира.

7. Что? Где? Когда? Игровой круг в телевикторине разбит на 13 одинаковых секторов. Секторы пронумерованы числами от 1 до 13. В каждом секторе в начале игры лежит конверт с вопросом. Игроки выбирают случайный сектор с помощью волчка со стрелкой. Если этот сектор уже выпадал прежде, то конверта в нем уже нет, и тогда играет следующий по часовой стрелке сектор. Если он тоже пуст, – следующий и т.д., пока не встретится непустой сектор. До перерыва игроки разыграли 6 секторов.

а) **(от 6 класса. 1 балл)** Что более вероятно: что в числе разыгранных есть сектор № 1 или что среди разыгранных есть сектор № 8?

б) **(от 7 класса. 5 баллов)**. Найдите вероятность того, что в результате оказались разыграны подряд шесть секторов с номерами от №1 до №6.

[1] Сюжет задачи предложен Борисом Френкиным

8. Самоотвод (от 6 класса, 2 балла). В школьном совете выбирают председателя. Кандидатов четверо: А, Б, В и Г. Предложена специальная процедура – каждый член совета должен записать на специальном листке кандидатов в порядке своих предпочтений. Например,

АВГБ

значит, что член совета на первое место ставит А, не очень возражает против В и считает, что он лучше, чем Г, зато меньше всего хотел бы видеть председателем Б.

Первое место даёт кандидату 3 очка, второе – 2 очка, третье – 1 очко, а четвертое – 0 очков. После сбора всех листков, избирательная комиссия суммирует очки у каждого кандидата. Побеждает тот, у кого наибольшая сумма очков.

После голосования выяснилось, что В (который набрал меньше всех очков) снимает свою кандидатуру в связи с переходом в другую школу. Заново голосовать не стали, а просто вычеркнули В из всех листков. В каждом листке осталось три кандидата. Поэтому первое место стало стоить 2 очка, второе – 1 очко, а третье – 0 очков. Очки просуммировали заново.

Могло ли случиться так, что кандидат, который прежде имел больше всех очков, после самоотвода В получил меньше всех? Если могло, приведите пример, как могли распределиться голоса. Если так быть не могло, объясните, почему.

9[2]. Бабушкины пирожки. В одном пакетике два пирожка с капустой, в другом два с вишней, в третьем – один с капустой и один с вишней. Выглядят и весят пирожки одинаково, так что неизвестно, какой с чем. Внуку в школу нужно дать один пирожок. Бабушка хочет дать пирожок с вишней, но она сама запуталась в своих пирожках и определить начинку может, только надломив пирожок. Надломленный пирожок внук не хочет, он хочет целый.

а) **(от 7 класса, 1 балл).** Покажите, что бабушка может действовать так, что вероятность дать внуку целый пирожок с вишней будет равна 2/3.

б) **(от 7 класса, 2 балла).** Существует ли стратегия, при которой вероятность дать внуку целый пирожок с вишней выше, чем 2/3? Если да – найдите эту стратегию. Если нет – докажите её отсутствие.

10. Вороны (от 7 класса, 2 балла). На берёзе сидели белые и чёрные вороны – всего их было 50. Белые точно были, но чёрных было не меньше, чем белых. На дубе тоже сидели белые и чёрные вороны, и было их всего 50. На дубе чёрных тоже было не меньше, чем белых или столько же, а может быть, даже на одну меньше. Одна случайная ворона перелетела с берёзы на дуб, а через некоторое время другая (хотя, может быть, та же самая) случайная ворона перелетела с дуба на берёзу. Что более вероятно: что количество белых ворон на берёзе стало таким же, как было сначала, или что оно изменилось?

[2] Автор Евгений Смирнов

11. Друзья-полярники (от 8 класса. 2 балла). На антарктической станции n полярников, все разного возраста. С вероятностью p между каждыми двумя полярниками завязываются дружеские отношения, независимо от других симпатий или антипатий. Когда зимовка заканчивается и наступает пора разъезжаться по домам, в каждой паре друзей старший даёт младшему дружеский совет. Найдите математическое ожидание числа тех, кто так и не получил ни одного дружеского совета.

12. Бал (от 8 класса. 3 балла). На бал пришли n семейных пар. В каждой паре муж и жена абсолютно одинакового роста, но двух пар одного роста нет. Начинает звучать вальс, и все пришедшие разбиваются случайным образом на пары: каждый кавалер танцует со случайно выбранной дамой. Найдите математическое ожидание случайной величины X «Число кавалеров, которые ниже своей партнёрши».

13. Кольцевая линия (от 8 класса. 3 балла). По будням Рассеянный Учёный едет на работу по кольцевой линии московского метро от станции «Таганская» до станции «Киевская», а вечером – обратно (см. схему).

Войдя на станцию, Учёный садится в первый же подошедший поезд. Известно, что в обоих направлениях поезда ходят с примерно равными интервалами, причём по северному маршруту (через «Белорусскую») поезд идёт от «Киевской» до «Таганской» или обратно 17 минут, а по южному маршруту (через «Павелецкую») – 11 минут.

По давней привычке Учёный всё всегда подсчитывает. Однажды он подсчитал, что по многолетним наблюдениям:

- поезд, идущий против часовой стрелки, приходит на «Киевскую» в среднем через 1 минуту 15 секунд после того, как на неё приходит поезд, идущий по часовой стрелки. То же верно и для «Таганской»;

- на поездку из дома на работу Учёный в среднем тратит на 1 минуту меньше, чем на поездку с работы домой.

Найдите математическое ожидание интервала между поездами, идущими в одном направлении.

14. Первая группа (от 8 класса. 3 балла). Последовательность состоит из 19 единиц и 49 нулей, стоящих в случайном порядке. Назовём группой максимальную подпоследовательность из одинаковых символов. Например, в последовательности 110001001111 пять групп: две единицы, потом три нуля, потом одна единица, потом два нуля и, наконец, четыре единицы. Найдите математическое ожидание длины первой группы.

15. Случайные векторы. Имеется n случайных векторов вида (y_1, y_2, y_3), где ровно одна случайная координата равна 1, остальные равны 0. Их складывают. Получается случайный вектор $\vec{a}$ с координатами (Y_1, Y_2, Y_3).

а) **(от 9 класса. 2 балла).** Найдите математическое ожидание случайной величины $\vec{a}^{\,2}$.

б) **(от 9 класса. 2 балла).** Докажите, что $|\vec{a}| \geq \frac{n}{\sqrt{3}}$.

16. Новогодний обычай (от 9 класса. 3 балла). У одного островного племени есть обычай – во время ритуального танца шаман подбрасывает высоко вверх три тонких прямых прута одинаковой длины, связанных в подобие буквы П. Соседние прутья связаны короткой ниткой и поэтому свободно вращаются друг относительно друга. Прутья падают на песок, образуя случайную фигуру. Если получается самопересечение (первый и третий прутья перекрещиваются), то племя в наступающем году ждут неурожаи и всякие неприятности. Если же самопересечения нет, то год будет удачным – сытным и счастливым. Найдите вероятность того, что на 2017 год прутья напророчат удачу.

17. Кролики (от 9 класса 3 балла). Кролики бывают гладкошёрстные и мохнатые. Тип шерсти определяется генами, унаследованными от родителей. Каждый кролик имеет два *аллеля* одного и того же гена, отвечающего за тип шерсти. Аллель мохнатости обозначим H (или h), а аллель гладкошёрстности обозначим S (или s). Если у кролика разные аллели, то всё зависит от того, какой аллель доминантный (подавляющий), а какой – рецессивный (подавляемый). Большие буквы используем для доминантных аллелей, а малые – для рецессивных. Таким образом, если *генотип* (комбинация аллелей) Hs, то кролик будет мохнатым, несмотря на наличие аллеля гладкошёрстности. Если генотип hS, то кролик гладкошёрстный. Каждый из родителей передает детёнышу один из своих аллелей. Например, если отец имел генотип hh, а мать – генотип hS, то детёныш может получить от отца только аллель h, а от матери с равными шансами любой из аллелей h и S. Поэтому с вероятностью 0,5 у детёныша будет генотип hh и с такой же вероятностью 0,5 будет генотип hS (мы считаем, что доминантность или рецессивность аллелей не связаны с полом кролика).

Известно, что в некоторой популяции кроликов аллель мохнатости встречается с вероятностью $p = 0{,}1$. Однажды в этой популяции при скрещивании мохнатого кролика с гладкошерстной крольчихой все четыре крольчонка оказались мохнатыми. Какой генотип наиболее вероятен у родителей этих крольчат?

18. Задача Стирлинга (от 9 класса, 5 баллов). Неправдоподобная легенда гласит, что однажды Стирлинг[3] размышлял над числами Стирлинга второго рода и в задумчивости бросал на стол 10 правильных игральных костей. После очередного броска он вдруг заметил, что в выпавшей комбинации очков присутствуют все числа от 1 до 6. Тут же Стирлинг задумался, а какова же вероятность такого события? Какова вероятность, что при бросании 10 костей каждое число очков от 1 до 6 выпадет хотя бы на одной кости?

19. Дартс (от 9 класса. 5 баллов). Согласно одной неправдоподобной легенде, Коши[4] и Буняковский[5] очень любили по вечерам играть в дартс. Но мишень у них была необычная – секторы на ней были неравные, так что вероятности попасть в разные секторы были не одинаковы. Однажды Коши бросил дротик и попал в мишень. Следующим бросает Буняковский. Что более вероятно: что Буняковский попадёт в тот же сектор, в который попал Коши, или что он попадёт в следующий сектор по часовой стрелке?

Любимый дартс Коши-Буняковского

[3] Джеймс Стирлинг – шотландский математик XVIII в.
[4] Огюстен Луи Коши – французский математик XIX века.
[5] Виктор Яковлевич Буняковский – российский математик XIX века.