9 класс

1. *Ответ.* Знак отрицательный.

Решение. Докажем, что на нечетных местах стоят отрицательные числа, а на четных — положительные. Тогда произведение всех чисел будет отрицательным, поскольку перемножаем 41 отрицательное число и 40 положительных чисел.

Пусть выписаны числа a_1, a_2, ..., a_{81}. Заметим, что если выкинуть произвольное число a_{2k+1} с нечетным номером, то остальные разбиваются на пары соседних:

$$\{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_{2k-1}, a_{2k}\}, \{a_{2k+2}, a_{2k+3}\}, \ldots, \{a_{80}, a_{81}\}.$$

Значит, сумма всех остальных чисел положительная, но с добавлением a_{2k+1} она становится отрицательной, т. е. $a_{2k+1} < 0$. Поскольку $a_{2k} + a_{2k+1} > 0$, то $a_{2k} > 0$. Наше утверждение доказано.

2. *Ответ.* Нет, не обязательно.

Решение. Рассмотрим 3 палочки длины 1 и палочку длины a. Тогда из палочек можно сложить либо правильный треугольник со стороной 1, либо треугольник со сторонами 1, 1, a. Подберем a, чтобы эти треугольники имели равную площадь. Для этого достаточно, чтобы высоты к сторонам длины 1 в этих треугольниках совпали, а это равносильно тому, что углы между единичными сторонами либо равны, либо в сумме дают 180°. То есть нужно подобрать a таким, чтобы искомый угол был равен 120°; очевидно, такой существует ($a=\sqrt{3}$).

Комментарий. На самом деле несложно доказать, что единственный пример, когда не все палочки одинаковой длины, это $(x, x, x, \sqrt{3}x)$.

3. *Решение.* Обозначим $S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}$. Предположим, что натуральное число n является решением уравнения из условия задачи. Пусть r_i — это остаток от деления n на a_i, иными словами, $n=a_i\left[\frac{n}{a_i}\right]+r_i$. Тогда

$$n=\left[\frac{n}{a_1}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{a_k}\right]=\frac{n-r_1}{a_1}+\ldots+\frac{n-r_k}{a_k}=$$
$$=n\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)-\left(\frac{r_1}{a_1}+\ldots+\frac{r_k}{a_k}\right)=nS-\left(\frac{r_1}{a_1}+\ldots+\frac{r_k}{a_k}\right),$$

откуда

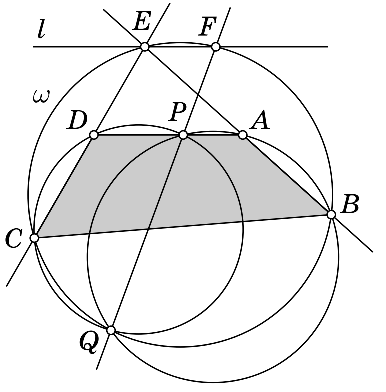
$$n=\frac{1}{S-1}\left(\frac{r_1}{a_1}+\ldots+\frac{r_k}{a_k}\right).$$

Таким образом, при заданном наборе чисел $(r_1, \ldots, r_k)$, удовлетворяющих условиям $0\leqslant r_i<a_i$, может быть не более одного натурального решения n с таким набором остатков. Всего таких наборов ровно $a_1a_2\ldots a_k$, поэтому и количество решений уравнения

$$n=\left[\frac{n}{a_1}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{a_k}\right]$$

не больше $a_1a_2\ldots a_k$.

4. *Решение.* Обозначим через E пересечение прямых AB и CD. Рассмотрим случай, в котором точка E лежит на луче CD за точкой D. Четырехугольники $CQPD$ и $BQPA$ —



вписанные, значит, $\angle CQP = \angle EDP$, а $\angle PQB = \angle PAE$. Сумма углов треугольника EDA равна

$$180^\circ = \angle DEA + \angle EDP + \angle PAE = \\ = \angle DEA + \angle CQP + \angle PQB = \angle CEB + \angle CQB.$$

Следовательно, четырехугольник $CQBE$ вписан в окружность ω — описанную окружность треугольника CBE. Обозначим через F вторую точку пересечения прямой PQ с ω. Четырехугольник $QCEF$ — вписанный. Значит,

$$180^\circ = \angle FED + \angle CQP = \angle FED + \angle EDP.$$

Отсюда следует, что прямые PD и FE параллельны.

Пусть l — прямая, проходящая через точку E параллельно AD. Тогда прямая PQ независимо от выбора точки P проходит через вторую точку пересечения окружности ω и прямой l. Случай, когда точка E лежит с другой стороны, разбирается аналогично.

Комментарий. То же решение можно изложить с использованием направленных углов, тогда оно без изменений будет проходить при любом расположении точек.

5. *Ответ.* При взаимно простых m, n.

Решение. Пронумеруем позиции по кругу числами от 0 до $m+n-1$ по часовой стрелке.

Построение расстановки для взаимно простых m и n. Поскольку n и m взаимно просты, взаимно просты и n и

$m+n$. Тогда при $k=0, 1, \ldots, m+n-1$ числа nk дают попарно разные остатки при делении на $m+n$. Возьмем k_0 такое, что nk_0 дает остаток 1 при делении на $m+n$.

Поставим 1 на позиции, соответствующие остаткам при делении на $m+n$ чисел $k_0, 2k_0, \ldots, (n-1)k_0, nk_0 \equiv 1$, а на остальные позиции нули. Тогда при повороте на k_0 позиций против часовой стрелки наша расстановка перейдет в расстановку с единицами на позициях, соответствующих остаткам чисел $0, k_0, 2k_0, \ldots, (n-1)k_0$. То есть при данном повороте единица на позиции 1 поменяется местами с нулем на позиции 0, а значит, расстановка является хорошей.

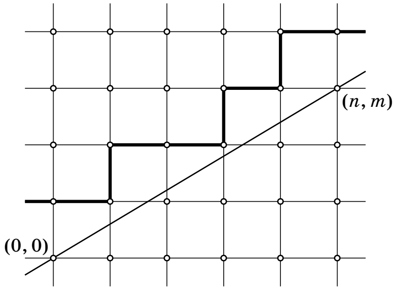
Доказательство взаимной простоты m и n. Пусть числа m и n имеют общий делитель $d > 1$. Рассмотрим остаток, который даёт сумма номеров позиций единиц при делении на d. При повороте на k к каждому номеру добавляется k (и, возможно, вычитается $m+n$), значит, к сумме всех номеров добавляется kn и вычитается некоторое кратное $m+n$, то есть остаток при делении на d этой суммы не меняется. С другой стороны, если поменять местами соседние 0 и 1, этот остаток изменяется ровно на 1. Значит, при этом не может получиться расстановка, отличающаяся от исходной поворотом.

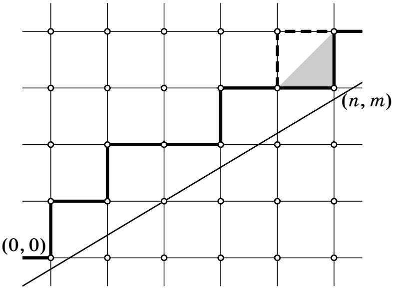
Комментарии. 1. Приведём другое доказательство того, что при взаимно простых m и n требуемая расстановка возможна. Доказательство будем вести индукцией по $m+n$; база при $m=n=1$ очевидна. Пусть $m+n>2$; тогда можно считать, что $m>n$. Поскольку числа $m-n$ и n взаимно просты, по предположению индукции существует расстановка $m-n$ нулей и n *двоек*, в которой можно поменять местами соседние ноль и двойку, получив расстановку, отличающуюся от исходной поворотом. Заменим теперь каждую двойку на подряд идущие 1 и 0. Тогда замена $02 \to 20$ в старой расстановке соответствует замене $010 \to 100$, то есть тоже замене соседних единицы и нуля. Значит, полученная расстановка — требуемая.

2. Решение можно также описывать геометрически. Для этого по расстановке единиц и нулей построим ломаную на плоскости: будем идти по кругу и откладывать отрезок $(1, 0)$, если по кругу стоит единица, и отрезок $(0, 1)$, если по кругу стоит нуль. Так как числа стоят по кругу, то получившаяся ломаная будет переходить в себя при сдвиге на вектор (n, m). Перестановка соседних нуля и единицы в терминах ломаной означает

«загибание уголка». Две расстановки чисел по кругу отличаются поворотом, если соответствующие ломаные переводятся друг в друга параллельным переносом.

Пусть теперь m и n взаимно просты. Возьмем прямую, проходящую через начало координат и точку (n, m), и построим ломаную с вертикальными и горизонтальными звеньями, огибающую эту прямую сверху (см. рисунок слева). Эта ломаная и соответствует искомой хорошей расстановке.





Действительно, начнем двигать нашу прямую вниз, пока она снова не начнет проходить через какую-то целую точку. Получим прямую, которая отличается от исходной сдвигом на целочисленный вектор (переводящим начало координат в эту целую точку). Значит, если провести огибающую ломаную, ей будет соответствовать расстановка 0 и 1, отличающаяся от предыдущей поворотом. А с другой стороны, от того, что мы сдвинули прямую, над ней добавились только целые точки на прямой $mx = ny$. С точностью до сдвига на (n, m) такая точка ровно одна, поэтому две построенные ломаные отличаются загибанием уголка (см. рисунок справа), а полученная расстановка 0 и 1 действительно хорошая.

Пусть теперь m, n не взаимно просты. Обозначим через d их наибольший общий делитель. Тогда площадь, которую период этой ломаной ограничивает над наклонной прямой $mx - ny = cd$, при загибании уголка изменяется на 1. Чтобы расстановка получилась та же, надо, чтобы ломаная была такой же с точностью до какого-то целочисленного сдвига, поэтому у новой ломаной площадь должна быть такой же относительно сдвинутой прямой. Но если мы сдвинем прямую на 1 (т. е. рассмотрим прямую вида $mx - ny = (c - 1)d$), то площадь увеличится на d, поэтому не может совпасть с той, что была.

3. Отметим, что такие расстановки 0 и 1 появляются и в других задачах: см., например, статью М. Концевича «Равномерные

расположения» (Квант, 1985, №7). Комбинаторная структура хорошей расстановки связана со структурой цепной дроби m/n, это видно как из индуктивного построения в прошлом комментарии, так и из геометрической конструкции, ее надо сравнивать с геометрическим подходом к цепным дробям, изложенным в брошюре «Цепные дроби» В. И. Арнольда (М: МЦНМО, 2015).

6. *Решение.* Докажем индукцией по k более общее утверждение: $2k$ аудиторий хватит для того, чтобы рассадить $n \leqslant k^2$ участников. Тогда для получения утверждения задачи достаточно будет подставить $k=45$, поскольку $2018 \leqslant \leqslant 2025 = 45^2$.

База $k=1, 2$. Поскольку $2k \geqslant k^2$, мы можем посадить каждого участника в отдельную аудиторию.

Пусть утверждение доказано, когда количество участников не больше $(k-1)^2$. Докажем утверждение, когда количество участников не больше k^2. Рассмотрим участника v с наибольшим числом d знакомых. Если $d \geqslant 2k-2$, то посадим v в одну аудиторию, всех его знакомых во вторую, а оставшихся $n-1-d \leqslant k^2-1-(2k-2)=(k-1)^2$ по предположению индукции мы можем рассадить в $2(k-1)$ аудиторий так, что в этих аудиториях не будет «кружков». В первой аудитории только один человек, поэтому «кружков» там быть не может, во второй аудитории нет «кружков», так как там нет v, но он знаком со всеми из этой аудитории.

Если же $d < 2(k-1)$, то заметим, что нам заведомо хватит $d+1 \leqslant 2k$ аудиторий. Выделим $d+1$ аудиторий и будем рассаживать участников по очереди так, чтобы никакие два знакомых не сидели в одной аудитории, тогда в одной аудитории не будут образовываться «кружки» (люди, сидящие в одной аудитории, не знакомы друг с другом). У каждого участника не больше чем d знакомых, так как аудиторий $d+1$, то всегда есть аудитория, где нет его друзей, куда мы его и посадим.

Комментарий. В задаче речь идет о так называемом *кликовом хроматическом числе* графа. Если обычное хроматическое число — это минимальное число цветов, в которые можно так покрасить все вершины, чтобы концы любого ребра имели разные цвета, то кликовое хроматическое число — это тоже минимальное число цветов для покраски вершин, только теперь требуется, чтобы все полные подграфы (*клики*), которые *максимальны по включению* (то есть не содержатся внутри еще больших полных подграфов) были неодноцветными (имели хотя бы две вершины разного цвета). Естественно, исключаются изолированные вершины, то есть вершины, которые ни с кем не соединены ребрами. Ясно, что если в графе нет треугольников (клик, имеющих три и более вершин), то в нем все максимальные по включению клики, не являющиеся изолированными вершинами, суть его ребра, а значит, для такого графа кликовое хроматическое число совпадает с обычным. Любопытно то, что если обычное хроматическое число подграфа всегда меньше хроматического числа графа, то с кликовым хроматическим числом все, конечно, не так, ведь у полного графа оно равно двум, а, например, у нечетного простого цикла оно равно трем.

Задача отыскания точных оценок кликового хроматического числа как в общем случае, так и для многих важных классов графов весьма далека от своего решения. В нашем случае речь шла как раз о произвольном графе: фактически в задаче требовалось доказать, что кликовое хроматическое число произвольного графа на n вершинах не превосходит $2\sqrt{n}$. Сейчас наилучшая известная верхняя оценка $\sqrt{2n}$, и это лишь в константу раз лучше, чем требует наша задача. Известно также, что для каждого n существует граф на n вершинах, кликовое хроматическое число которого не меньше $c\sqrt{n/\ln n}$ для некоторой константы c. Таким образом, между верхними и нижними оценками сохраняется зазор в корень из логарифма раз, и этот зазор кому-то предстоит устранить — возможно, кому-то из читающих эту брошюру!

Отметим и один из интереснейших классов графов. Это так называемые *геометрические графы*. У них вершины — точки в пространстве (или даже просто на плоскости), а ребра соединяют пары точек, находящихся на расстоянии не больше 1. Эти графы важны для таких классических задач комбинаторики, как проблема Нелсона—Хадвигера раскраски пространства, проблема Борсука и др. (см. брошюры А. М. Райгородского «Хроматические числа», «Проблема Борсука» (М.: МЦНМО, 2015); про разные вариации на тему этих графов уже бывали задачи на ММО — например, задача 6 для 10 класса в варианте 2010 года). Так вот для этих графов даже в случае плоскости зазор между верхними и нижними оценками аж от 3 до 9!