Пригласительный тур XI олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

Ответы и решения

Вариант 1

Задания с кратким ответом

Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	245	4	6,5 ч (390 мин)
2	5/12	5	8/35
3	58	6	280

Примечание. Задания 1–6 считаются выполненными, если дан верный ответ.

Задания с развёрнутым ответом

7. *Доказательство*. Пусть в первом наборе N чисел, а во втором K чисел, и пусть в первом наборе a чисел не меньше числа 3, а во втором наборе b чисел не меньше числа 3 и при этом $a \geq \frac{N}{2}$ и $b \geq \frac{K}{2}$. Тогда в объединённом наборе всего $N+K$ чисел, из них $a+b$ чисел не меньше числа 3, и при этом $a+b \geq \frac{N+K}{2}$, то есть по крайней мере половина чисел объединённого набора не меньше числа 3.

Аналогично показывается, что хотя бы половина чисел объединённого набора не больше числа 3. Это означает, что число 3 является медианой объединённого набора.

Критерий оценивания	Балл
Решение полное и верное	2
Рассуждение неполное, например, только для случаев, когда в обоих наборах нечётное количество чисел, или в рассуждении допущена неточность	1
Доказательство в корне неверно или отсутствует	0

8. *Решение*. Найдём вероятность противоположного события «группы связаться не смогут». Рассмотрим пары туристов, в которых первый турист из первой группы, а второй – из второй. Таких пар всего $5 \cdot 8 = 40$. Поэтому вероятность того, что ни у кого из туристов нет телефона никого из другой группы, равна $(1-p)^{40}$.

Следовательно, искомая вероятность равна $1-(1-p)^{40}$.

Ответ: $1-(1-p)^{40}$.

Критерий оценивания	Балл
Решение полное и верное	3
Найдена вероятность противоположного события, последний этап забыт	2
Принцип решения верный, но неверно посчитано число пар	1
Решение отсутствует или полностью неверное	0

9. *Решение.*

1-й способ. Элементарным исходом в случайном эксперименте является тройка мест, на которые встали дети в красных колпаках. Рассмотрим событие A «все три красных колпака рядом». Этому событию благоприятствуют 10 элементарных исходов. Событию B «два красных колпака рядом, а третий – отдельно», благоприятствуют 60 элементарных исходов (10 способов выбрать два места рядом, а третье место должно оказаться на одном из 6 мест, не граничащих с уже выбранными). Общее число способов выбрать тройку равно $C_{10}^3=120$. Тогда искомая вероятность равна $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{70}{120}=\frac{7}{12}$.

2-й способ. Пронумеруем детей в красных колпаках. Рассмотрим события A_1 «второй и третий колпаки рядом», A_2 «первый и третий колпаки рядом» и A_3 «первый и второй колпаки рядом». Нужно найти вероятность объединения:

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)-$$
$$-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_3)-\mathrm{P}(A_2\cap A_3)+\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

Вероятность события A_1 равна 2/9 (если второй колпак занял какое-то место, то для третьего колпака осталось девять мест, но только два из них рядом со вторым). Вероятности событий A_2 и A_3 такие же:

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\frac{2}{9}.$$

Событие $A_1\cap A_2$ состоит в том, что третий колпак между первым и вторым. Вероятность этого равна $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{36}$. Такова же вероятность двух других попарных пересечений:

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2)=\mathrm{P}(A_1\cap A_3)=\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\frac{1}{36}.$$

Событие $A_1\cap A_2\cap A_3$ невозможно: $\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=0$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)=3\cdot\frac{2}{9}-3\cdot\frac{1}{36}+0=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}.$$

3-й способ аналогичен 2-му способу из второго варианта. Возможны и другие способы решения.

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Критерий оценивания	Балл
Решение полное и верное	3
Из решения понятен выбранный метод, но верно найдена только вероятность события «ровно два рядом»	2
Из решения понятен выбранный метод, но верно найдена только вероятность события «все три рядом»	1
Решение отсутствует или неверное	0

Вариант 2

Задания с кратким ответом

Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	1345	4	9,5 ч (570 мин)
2	7/15	5	2/7
3	56	6	315

Примечание. Задания 1 – 6 считаются выполненными, если дан верный ответ.

Задания с развёрнутым ответом

7. *Доказательство*. Пусть в первом наборе N чисел, а во втором – K чисел. Тогда сумма чисел первого набора равна $2N$, а второго $5K$. Оценим среднее арифметическое:

$$\frac{2N+5K}{N+K} > \frac{2N+2K}{N+K} = 2 \text{ и } \frac{2N+5K}{N+K} < \frac{5N+5K}{N+K} = 5.$$

Критерий оценивания	Балл
Доказательство полное и верное	2
Рассуждение неполное, например, только для случая, когда в обоих наборах одинаковое количество чисел, или в рассуждении допущена неточность	1
Доказательство в корне неверно или отсутствует	0

8. *Решение*.

Найдём вероятность противоположного события «группы связаться не смогут». Рассмотрим пары туристов, в которых первый турист из первой группы, а второй – из второй. Таких пар всего $6 \cdot 7 = 42$. Поэтому вероятность того, что ни у кого из туристов нет телефона никого из другой группы, равна $(1-p)^{42}$.

Следовательно, искомая вероятность равна $1-(1-p)^{42}$.

Ответ: $1-(1-p)^{42}$.

Критерий оценивания	Балл
Решение полное и верное	3
Найдена вероятность противоположного события, последний этап забыт	2
Принцип решения верный, но неверно посчитано число пар	1
Решение отсутствует или полностью неверное	0

9. *Решение.*

1-й способ. Элементарным исходом в случайном эксперименте является тройка мест, на которые встали дети в зелёных колпаках. Рассмотрим событие A «все три зелёных колпака рядом». Этому событию благоприятствуют 9 элементарных исходов. Событию B «два зелёных колпака рядом, а третий – отдельно», благоприятствуют 45 элементарных исходов (9 способов выбрать два места рядом, а третье место должно оказаться на одном из 5 мест, не граничащих с уже выбранными). Общее число способов выбрать тройку равно $C_9^3 = 84$. Тогда вероятность события «какие-то два зелёных колпака рядом» равна $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{54}{84} = \frac{9}{14}$, а искомая вероятность равна $1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = \frac{5}{14}$.

2-й способ. Пронумеруем детей в зелёных колпаках и составим пары «зелёный–красный» так, чтобы справа от каждого зелёного колпака располагался красный. Справа от первого зелёного колпака можно поставить любого из шести красных, справа от второго – одного из пяти оставшихся, а справа от третьго – одного из четырёх оставшихся красных. Получились три пары «зелёный–красный» и отдельно ещё три красных колпака. Таких группировок ровно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Расставим эти пары и отдельные колпаки (всего шесть элементов) в хоровод. Это можно сделать $5!$ способами, причём никакие два зелёных колпака не стоят рядом, поскольку справа от каждого зелёного расположен красный колпак.

Общее число способов расставить 9 детей в хоровод равно $8!$.

Значит, искомая вероятность равна $\frac{120 \cdot 5!}{8!} = \frac{120}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{14}$.

3-й способ аналогичен 2-му способу из первого варианта. Возможны и другие способы решения.

Ответ: $\frac{5}{14}$.

Критерий оценивания	**Балл**
Решение полное и верное	3
Из решения понятен выбранный метод, но верно найдена вероятность события «не все три рядом»	2
Из решения понятен выбранный метод, но верно найдена только вероятность события «какие-то два не рядом»	1
Решение отсутствует или неверное	0