XII ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР. РЕШЕНИЯ

II. Задачи

4. Три броска (от 6-го класса. 1 балл). Одну игральную кость бросают три раза. Какое событие более вероятно:

A «какое-то число очков выпадет хотя бы два раза» или

B «при трёх бросках выпадут три разных числа очков».

Решение. Вероятность события B равна

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3}=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}.$$

Следовательно, событие B более вероятно, чем событие $A=\overline{B}$.

Ответ: B.

5. Премия (от 6-го класса. 1 балл). В конце года директор фирмы выписал техническому отделу крупную премию. Начальник отдела хочет распределить премию между всеми десятью сотрудниками так, чтобы средний доход сотрудников отдела в декабре (с учётом и заработной платы, премии) оказался наибольшим. Начальник думает, как ему поступить:

1. дать премию только двум самым малооплачиваемым сотрудникам.
2. дать премию только двум самым высокооплачиваемым сотрудникам.
3. разделить премию на всех поровну.
4. забрать всю премию себе.
5. поступить как-то иначе (как?)

Если вы выбрали какой-то вариант, обоснуйте, почему именно этот вариант даст наибольший средний доход сотрудников отдела.

Решение. Средний доход сотрудников отдела в декабре равен $\frac{A+E}{10}$, где A – суммарная декабрьская зарплата, а E – суммарная премия сотрудников отдела. Поэтому средний доход не зависит от того, каким именно образом распределена премия между сотрудниками.

Ответ: средний доход в декабре не зависит от способа распределения.

6. Остановившиеся часы (от 6-го класса. 1 балл). На часах две стрелки: часовая и минутная. В случайный момент времени часы остановились. Найдите вероятность того, что угол между стрелками на остановившихся часах острый.

Решение. Предположим, что циферблат часов тоже вращается со скоростью часовой стрелки так, что часовая стрелка все время направлена на 12 часов. Тогда минутная стрелка будет образовывать острый угол, если она находится в промежутке от 12 до 3 часов или от 9 часов до 12, то есть внутри шести часовых промежутков из двенадцати. Искомая вероятность равна $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

7. Письма (от 6-го класса. 1 балл). В почтовом отделении курьер отправляет 100 писем. Письма весом больше 100 г не принимаются. Стоимость отправки зависит от веса письма. Минимальная стоимость (письма весом до 20 г включительно) равна 22 руб., за каждые следующие полные или неполные 20 г добавляется еще 2 руб. 50 коп. (см. таблицу).

Почтовые тарифы на простые письма	
Вес, г	Цена, р
до 20	22,00
от 21 до 40	24,50
от 41 до 60	27,00
от 61 до 80	29,50
от 81 до 100	32,00

Первая операционистка[1] на почте считает, что нужно взвесить по отдельности все 100 писем, найти стоимость отправки каждого по таблице, а потом все суммы сложить.

Вторая предлагает взвесить все письма сразу, найти средний вес письма, определить по таблице стоимость отправки и умножить результат на 100. Она говорит, что это даст ту же сумму, только быстрее. Права ли вторая операционистка?

Решение. Не права. Предположим, что два письма весят 100 г, а все остальные по 20 г. Тогда первая операционистка посчитает, что курьер должен заплатить $98\cdot 22+2\cdot 32=2220$ р.

Вторая операционистка найдёт, что средний вес письма равен

$$\frac{20\cdot 98+100\cdot 2}{100}=21{,}6 \text{ г},$$

и его отправка стоит 24,5 р. Поэтому она насчитает $24{,}5\cdot 100=2450$ рублей.

Возможны и другие примеры, показывающие, что разные методы подсчёта могут давать разные результаты.

Ответ: нет, не права.

8. Отзывы (от 7-го класса. 1 балл). Гневные отзывы о работе интернет-магазина оставляют 80% недовольных покупателей (тех, кого плохо обслужили в магазине). Из числа довольных покупателей положительный отзыв оставляют только 15%. Некоторый интернет-магазин заработал 60 гневных и 20 положительных отзывов. Пользуясь этой статистикой, оцените вероятность того, что очередной покупатель останется доволен обслуживанием в этом интернет-магазине.

[1] Служащая почтового отделения, выполняющая операции по отправке.

Решение. Пусть p – вероятность того, что покупателя обслужат хорошо, а $q=1-p$ – вероятность того, что плохо. Тогда вероятность того, что покупатель оставит хороший отзыв, равна $0{,}15p$, а вероятность того, что будет плохой отзыв, равна $0{,}8(1-p)$. Тогда

$$\frac{0{,}15p}{0{,}8(1-p)} \approx \frac{1}{3}, \text{ откуда } 25p \approx 16, \quad p \approx 0{,}64.$$

Ответ: прибл. 0,64.

9. Случайный выбор. Из натуральных чисел от 1 до n нужно выбрать k различных $(k<n)$. Программист предлагает следующий алгоритм.

1. Все числа располагают по кругу (в вершинах n-угольника).
2. Первое число выбирается случайным образом.
3. Каждое следующее число выбирается независимо от предыдущих. Если оно совпало с каким-то из уже выбранных, следует двигаться по часовой стрелке до первого невыбранного числа.

В конце концов, получается k различных чисел.

а) **(От 6-го класса. 1 балл).** Верно ли, что появление каждого конкретного числа в такой выборке равновероятно?

б) **(От 7-го класса. 1 балл).** Верно ли, что появление всех выборок равновероятно?

Решение. а) Да, вероятность появления каждого числа равна k/n в силу симметрии.

б) Нет. Приведём пример, показывающий, что разные выборки не равновероятны. Предположим, что $k=2$. Выборка $(1;3)$ появится с вероятностью $\frac{2}{n^2}$ (проверьте). Выборка $(1;2)$ может появиться тремя способами:

1. Сначала выбрано число 1, затем число 2.
2. Сначала выбрано число 2, затем число 1.
3. Сначала выбрано число 1 и затем снова число 1.

Значит, вероятность появления выборки $(1;2)$ равна $3\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{3}{n^2}$.

Если $n>2$, то, рассуждая так же, легко показать, что разные выборки тоже не будут равновероятны: более вероятны те, где встречаются последовательные числа.

Ответ: а) да; б) нет.

10. Длина реки (от 8-го класса. 2 балла). Географическое общество Анчурии (GSA) отправило экспедицию, цель которой – измерение протяжённости русла великой анчурийской реки Рио-Коралио. Оказалось, что протяжённость русла от истока до устья равна 402 км плюс-минус 500 м, при этом вероятность ошибки равна 0,04, причём ошибки в большую или меньшую сторону равновероятны.

Независимо от GSA агентство AWRA («Анчурийские водные ресурсы») провело своё исследование на эту тему. Результат: 403 км плюс-минус 500 м. Вероятность ошибки также равна 0,04, и, опять же, ошибки в большую и меньшую сторону равновероятны.

Когда результаты опросов сравнили и убедились, что ошибок в методах и в измерениях нет, президент GSA и директор AWRA совместно обратились к Рассеянному Учёному, который является признанным экспертом в области статистики, чтобы он объяснил расхождение. Учёный обрадовался и сказал: «Теперь я точно знаю протяженность Рио-Коралио с малой вероятностью ошибки». Как он мог рассуждать? Найдите оценку и вероятность ошибки.

Решение. Учёный мог рассуждать следующим образом. При измерении ошибки в ту и другую сторону равновероятны. Поэтому согласно данным GSA, вероятность того, что русло длиннее 402,5 км, равна 0,02, Аналогично, результаты AWRA говорят, что с вероятностью 0,02 протяженность русла менее 402,5 км. Как известно, ошибок в проведённых измерениях нет. Следовательно, с вероятностью $1-2\cdot 0,02=0,96$ протяжённость Рио-Коралио ровно 402,5 км.

Ответ: 402,5 км с вероятностью ошибки 0,04.

11. Платная дорога (от 8-го класса. 3 балла). Стоимость проезда по участку платной автодороги зависит от класса автомобиля: легковые автомобили относятся к первому классу, для них стоимость проезда 200 рублей, а лёгкие грузовые и микроавтобусы – ко второму, для них стоимость 300 рублей.

При въезде на пункт оплаты установлена автоматическая система, измеряющая высоту автомобиля. Если высота машины меньше некоторого порогового значения h, то система автоматически относит его к классу 1, а если выше h, то к классу 2. При этом возможны ошибки. Например, низенький микроавтобус система может отнести к классу 1, и его водитель будет доволен. Легковой УАЗ может быть ошибочно отнесён к классу 2, и его водитель будет этому не рад. Он может подать заявку, и компания-оператор будет должна вернуть ему 100 рублей.

Руководство компании поставило перед инженерами задачу: настроить систему так, чтобы количество ошибок было наименьшим.

Несколько недель инженеры собирали данные о высоте автомобилей, проходящих через пункт оплаты. Отдельно – о машинах класса 1 и отдельно – о машинах класса 2 (рис. 5). На оси абсцисс отложена высота автомобиля (в см), на оси ординат – среднее количество машин такой высоты, проходящих через пункт за сутки. Для наглядности точки соединены плавной линией.

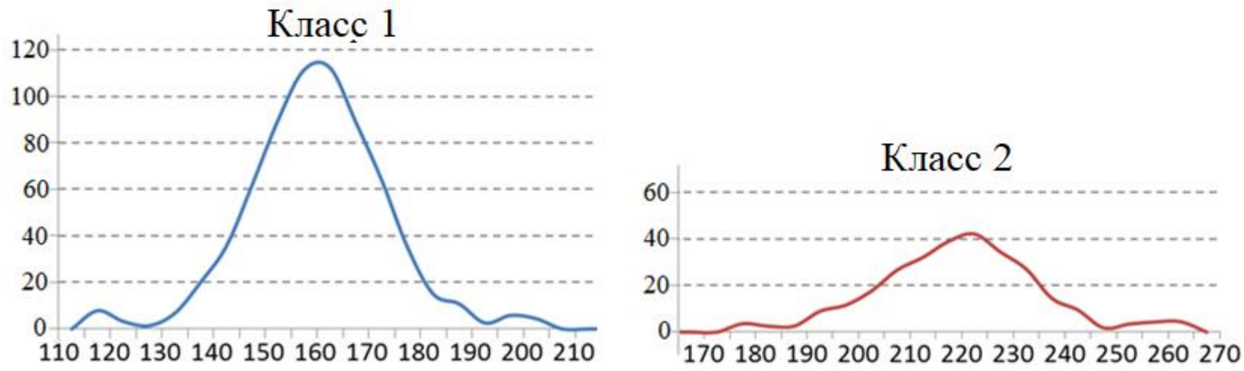


Рис. 5. Графики – количество машин класса 1 и класса 2 в сутки

Собрав всю эту информацию и начертив графики, инженеры стали думать, что делать дальше: как определить пороговое значение h, чтобы вероятность ошибки оказалась наименьшей возможной? Решите эту задачу для них.

Решение. Построим оба графика в одной системе координат. Проведем вертикальную прямую $x = h$ через точку пересечения графиков. Это значение h — искомое.

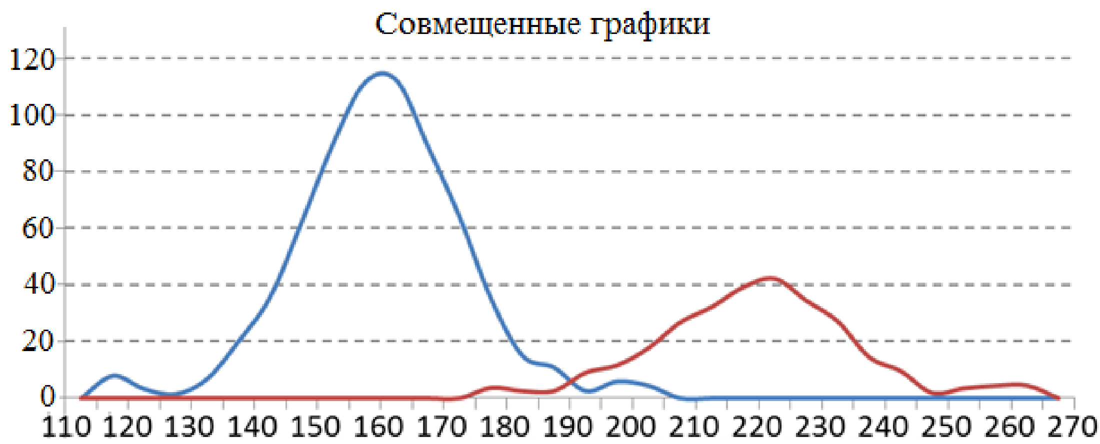


Рис.2. Два графика в одной системе координат

Докажем это геометрически. Точку пересечения назовём C. Проведём какую-нибудь вертикальную прямую $x = h$ (для определённости справа от точки пересечения графиков). Введём обозначения ещё нескольких точек, как показано на рис. 3.

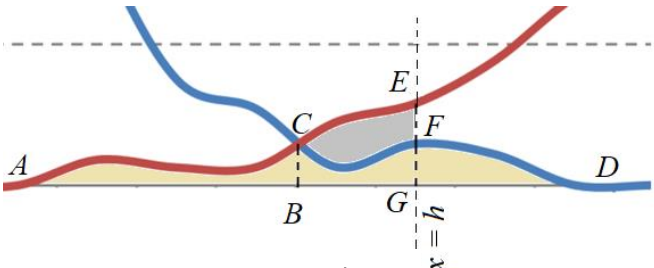


Рис. 3.

Ошибки могут быть двух типов. Первый тип – ошибка, когда система принимает автомобиль класса 1 за класс 2. Количество таких ошибок изображается площадью фигуры, заключенной под графиком 1 справа от прямой

$x = h$, то есть площадью криволинейного треугольника GFD. Ошибка второго типа: система ошибочно принимает класс 2 за класс 1. Количество таких ошибок равно площади криволинейного треугольника AEG, заключенного под графиком 2 слева от прямой $x = h$. Фигура, составленная из треугольников FGD и AEG, имеет наименьшую площадь, когда площадь треугольника CEF наименьшая. Эта площадь равна нулю, только если прямая $x = h$ совпадает с прямой BC. Значит, искомое значение – абсцисса общей точки графиков[2]: примерно 190 см.

Ответ: прибл. 190 см.

12. Стрелы Ивана-Царевича (от 8-го класса. 3 балла). Иван-Царевич учится стрелять из лука. Он положил в колчан 14 стрел и пошёл стрелять по шишкам в лес. Он сбивает шишку с вероятностью 0,1, и за каждую сбитую шишку Царевна-Лягушка дает ему ещё 3 стрелы. Стреляет Иван-Царевич до тех пор, пока стрелы у него не кончатся. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, которые сделает Иван-Царевич.

Решение. Первый способ. Пусть в настоящий момент времени у Ивана n стрел. Обозначим X_0 случайную величину «количество выстрелов, которые нужно сделать, чтобы число стрел уменьшилось на одну». Иван-Царевич делает выстрел. Рассмотрим случайную величину – индикатор I успешного выстрела. $I = 0$, если выстрел неудачен (вероятность этого 0,9), или $I = 1$, если шишка сбита (вероятность 0,1). Тогда

$$X_0 = (1 - I) \cdot 1 + I \cdot (1 + X_1 + X_2 + X_3).$$

где X_1, X_2 и X_3 – такие же случайные величины, как X_0. Каждая из них равна количеству выстрелов, которые нужно сделать, чтобы количество имеющихся в запасе стрел уменьшилось на одну после того, как от Царевны получены три новые стрелы.

Величина I связана только с ближайшим выстрелом, а величины X_k при $k = 1, 2, 3$ – только с последующими. Поэтому случайные величины I и X_k независимы. Перейдем к математическим ожиданиям в полученном равенстве:

$$\mathrm{E}\, X_0 = (1 - \mathrm{E}\, I) + \mathrm{E}\, I \cdot (1 + \mathrm{E}\, X_1 + \mathrm{E}\, X_2 + \mathrm{E}\, X_3).$$

Поскольку все величины от X_0 до X_3 распределены одинаково, их математические ожидания равны между собой. Обозначим их a. Кроме того, $\mathrm{E}\, I = 0,1$. Поэтому

$$a = (1 - 0,1) + 0,1 \cdot (1 + 3a), \text{ откуда } a = \frac{10}{7}.$$

[2] Если графики пересекались бы в нескольких точках, то решение было бы сложнее: пришлось бы из всех точек пересечения выбрать «наилучшую» – ту, где вероятность ошибки наименьшая.

Значит, чтобы избавиться от одной стрелы, Ивану-Царевичу требуется в среднем $10/7$ выстрела. Чтобы избавиться от всех 14 стрел, которые были сначала, нужно в среднем $14 \cdot 10/7 = 20$ выстрелов.

Второй способ. Узнаем, на сколько меньше стрел остаётся у Ивана в результате k-го выстрела (с учётом новых, подаренных Царевной). Обозначим эту случайную величину X_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Из условия видно, что $X_k = 1$, если Иван не сбил шишку, или $X_k = -2$ (стрел стало на 2 больше), если Иван шишку сбил. То есть

$$X_k \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

независимо от k. Найдем математическое ожидание: $\mathrm{E}\,X = 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7$: с каждым выстрелом у Ивана становится в среднем на 0,7 стрелы меньше.

Введём индикаторы отдельных выстрелов I_k, где $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$I_k = \begin{cases} 0, \text{ если на } k\text{-ый выстрел стрел не хватило,} \\ 1, \text{ если } k\text{-ый выстрел состоялся.} \end{cases}$$

Общее количество выстрелов равно

$$S = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_k + \ldots,$$

а общее изменение (уменьшение) числа стрел равно

$$I_1 X_1 + I_2 X_2 + \ldots + I_k X_k + \ldots$$

К моменту, когда все стрелы кончились, эта сумма равна 14. Составим уравнение

$$14 = I_1 X_1 + I_2 X_2 + \ldots + I_k X_k + \ldots$$

и перейдём к математическому ожиданию в правой части (левая – константа):

$$14 = \mathrm{E}\left(I_1 X_1 + I_2 X_2 + \ldots + I_k X_k + \ldots\right).$$

Случайная величина I_k зависит только от того, сколько стрел осталось после $k-1$ выстрелов, поэтому величины I_k и X_k независимы. Следовательно,

$$14 = \mathrm{E}\,I_1 \cdot \mathrm{E}\,X_1 + \mathrm{E}\,I_2 \cdot \mathrm{E}\,X_2 + \ldots + \mathrm{E}\,I_k \cdot \mathrm{E}\,X_k + \ldots =$$

$$= 0{,}7\left(\mathrm{E}\,I_1 + \mathrm{E}\,I_2 + \ldots + \mathrm{E}\,I_k + \ldots\right) = 0{,}7\,\mathrm{E}\left(I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_k + \ldots\right) = 0{,}7\,\mathrm{E}\,S.$$

Следовательно, $\mathrm{E}\,S = 14 : 0{,}7 = 20$.

Ответ: 20.

13. Случайный граф (от 8-го класса. 3 балла). На плоскости 20 точек были попарно связаны между собой отрезками (рёбрами)[3] – каждая точка с каждой другой. Затем случайным образом выбрали 35 рёбер и удалили их. Найдите вероятность того, что получившийся граф связен (то есть из любой точки можно дойти до любой другой по рёбрам).

Решение. Граф несвязен, если его можно разбить на две группы точек, причём ни одна точка первой группы не связана ребром ни с какой точкой во второй группе. Предположим, что в первой группе n точек, причем $2 \le n \le 10$, а во второй – остальные $20-n$ точек. Оставшиеся после удаления рёбра связывают точки в первой группе и точки во второй группе, но рёбер, ведущих из одной группы в другую, нет. Из каждой из n точек первой группы выходило $20-n$ рёбер к точкам второй группы, и все эти рёбра удалены. Поэтому удалено не меньше чем $n(20-n) = 20n - n^2$ рёбер. При $2 \le n \le 10$ наименьшее значение этого выражения равно

$$r(2) = 40 - 4 = 36.$$

Значит, удалить 35 рёбер так, чтобы в каждой группе осталось хотя бы две точки, невозможно. Поэтому граф не связен, только если есть единственная точка, которая не связана ни с какой другой (изолированная точка).

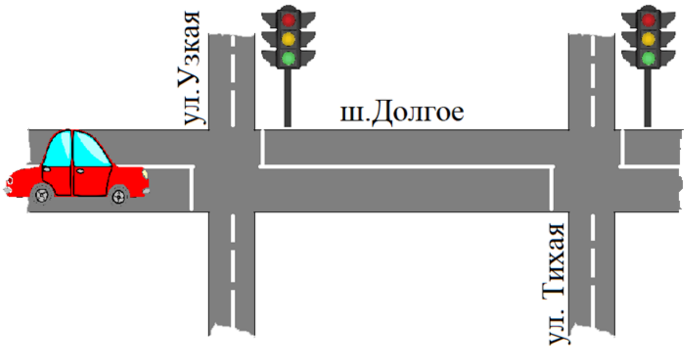
Пусть A – некоторая точка. Из 19 рёбер, связывающих её с другими точками, все 19 удалены. Из оставшихся $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$ рёбер удалены ещё 16 штук. Это можно сделать всего $C_{19}^{19} \cdot C_{171}^{16} = C_{171}^{16}$ способами. Сначала в графе было $C_{20}^{2} = 190$ рёбер. Поэтому удалить 35 ребер можно всего C_{190}^{35} способами. Значит, вероятность того, что точка A изолирована, равна $\frac{C_{171}^{16}}{C_{190}^{35}}$.

Осталось учесть, что изолированной точкой может быть любая, и поэтому имеется 20 несовместных равновозможных вариантов. Следовательно, вероятность того, что граф не связен, равна $\frac{20C_{171}^{16}}{C_{190}^{35}}$.

Ответ: $1 - \frac{20C_{171}^{16}}{C_{190}^{35}}$.

[3] Такую конструкцию, состоящую из точек и отрезков (прямых или кривых линий), связывающих некоторые из точек, в математике называют *графом*. Точки называют вершинами, а отрезки – рёбрами графа.

4. Светофоры (от 9-го класса. 2 балла). Шоссе Долгое пересекается с улицей Узкой и с улицей Тихой (см. рис.) На обоих перекрёстках стоят светофоры. Первый светофор x секунд разрешает движение по шоссе, а полминуты – по ул.Узкой. Второй светофор две минуты разрешает движение по шоссе, а x секунд – по ул. Тихой. Светофоры работают независимо друг от друга. При каком значении x вероятность проехать по Долгому шоссе оба перекрестка, не останавливаясь на светофорах, будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая вероятность?



Решение. **Первый способ**. Время будем измерять в секундах. Вероятность проехать без остановки перекрёсток с ул.Узкой равна $\frac{x}{x+30}$. Вероятность проехать без остановки перекрёсток с ул.Тихой равна $\frac{120}{x+120}$. Поскольку светофоры работают независимо друг от друга, вероятность проехать оба перекрёстка без остановки равна

$$p(x)=\frac{120x}{(x+30)(x+120)}=120\cdot\frac{x}{x^2+150x+3600}.$$

Найдем, при каком x функция

$$f(x)=\frac{120}{p(x)}=\frac{x^2+150x+3600}{x}=x+\frac{3600}{x}+150$$

имеет наименьшее значение на луче $(0;+\infty)$. В силу неравенства Коши о средних[4]

$$f(x)\geq 150+2\sqrt{x\cdot\frac{3600}{x}}=150+2\cdot 60=270,$$

следовательно, при всех x

$$p(x)=\frac{120}{f(x)}\leq\frac{120}{270}=\frac{4}{9},$$

причём равенство достигается, если $x=\frac{3600}{x}$, откуда $x=60$.

[4] Среднее арифметическое положительных чисел больше или равно, чем их среднее геометрическое, причём равенство достигается, только если числа равны между собой.

Второй способ. Найти точку максимума функции $p(x)$ можно с помощью производной.
Ответ: 60 секунд. Вероятность равна $4/9$.

15. Кто богаче? (от 9-го класса. 4 балла). У кота Базилио и лисы Алиса не осталось ни сольдо. И тогда они нанялись ставить и убирать декорации в театре Карабаса-Барабаса. Каждый вечер после спектакля Карабас даёт им монету в один сольдо, и между котом и лисой немедленно начинается драка.

С вероятностью 0,25 побеждает кот и забирает монету себе, с вероятностью 0,25 побеждает лиса и забирает монету себе, а с вероятностью 0,5 обоих отводят в полицию и отбирают у них все деньги (не только сегодняшние, а вообще все). Вопрос: на сколько сольдо у одного из компаньонов окажется больше, чем у другого к концу 10-го дня подработки (модуль разности их состояний)? Найдите математическое ожидание этой величины.

Решение. Обозначим X_n случайную величину «абсолютная разность между состоянием кота и состоянием лисы к концу n-го дня работы». Удобно следить не за абсолютной разностью, а за разностью со знаком. Для определённости будем следить за случайной величиной «разность состояний кота и лисы». Пусть $p_{k,n}$ – вероятность события «разность равна k к исходу n-го дня». Можно считать, что $p_{0,0}=1$ и что $p_{k,0}=0$ при $k\neq 0$.

Найдем вероятность $p_{0,n}$ при $n>0$. Событие «разность равна нулю к концу n-го дня» осуществится в одном из трёх случаев:

1. Накануне разность была -1 (у лисы на 1 сольдо больше), и кот выиграл драку. Вероятность этого события равна $1/4$.

1. Накануне разность была 1, но кот проиграл драку. Вероятность этого события $1/4$.

2. Обоих забрали в полицию. Вероятность этого $1/2$.

Следовательно,

$$p_{0,n}=\frac{1}{4}p_{-1,n-1}+\frac{1}{4}p_{1,n-1}+\frac{1}{2}.$$

Похожими рассуждениями находим вероятность $p_{k,n}$ при $k\neq 0, n>0$. Отличие будет в отсутствии последнего слагаемого:

$$p_{k,n}=\frac{1}{4}p_{k-1,n-1}+\frac{1}{4}p_{k+1,n-1}.$$

С помощью Excel или любого другого подходящего средства построим таблицу вероятностей для $n\le 10$ и $-10\le k\le 10$.

Табл. 1. Распределение случайной величины «Преимущество кота» для $n \le 10$

День	На сколько сольдо у кота больше, чем у лисы (от 0 до 10 сольдо)										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,500000	0,250000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,625000	0,125000	0,062500	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,562500	0,171875	0,031250	0,015625	0	0	0	0	0	0	0
4	0,585938	0,148438	0,046875	0,007813	0,003906	0	0	0	0	0	0
5	0,574219	0,158203	0,039063	0,012695	0,001953	0,000977	0	0	0	0	0
6	0,579102	0,153320	0,042725	0,010254	0,003418	0,000488	0,000244	0	0	0	0
7	0,576660	0,155457	0,040894	0,011536	0,002686	0,000916	0,000122	0,000061	0	0	0
8	0,577728	0,154388	0,041748	0,010895	0,003113	0,000702	0,000244	0,000031	0,000015	0	0
9	0,577194	0,154869	0,041321	0,011215	0,002899	0,000839	0,000183	0,000065	0,000008	0,000004	0
10	0,577435	0,154629	0,041521	0,011055	0,003014	0,000771	0,000226	0,000048	0,000017	0,000002	0,000001

Табл. 1. Распределение случайной величины «Преимущество кота» для $n \le 10$ (продолжение)

День	На сколько сольдо у кота больше, чем у лисы (от -10 до 0 сольдо)										
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,250000	0,500000
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0,062500	0,125000	0,625000
3	0	0	0	0	0	0	0	0,015625	0,031250	0,171875	0,562500
4	0	0	0	0	0	0	0,003906	0,007813	0,046875	0,148438	0,585938
5	0	0	0	0	0	0,000977	0,001953	0,012695	0,039063	0,158203	0,574219
6	0	0	0	0	0,000244	0,000488	0,003418	0,010254	0,042725	0,153320	0,579102
7	0	0	0	0,000061	0,000122	0,000916	0,002686	0,011536	0,040894	0,155457	0,576660
8	0	0	0,000015	0,000031	0,000244	0,000702	0,003113	0,010895	0,041748	0,154388	0,577728
9	0	0,000004	0,000008	0,000065	0,000183	0,000839	0,002899	0,011215	0,041321	0,154869	0,577194
10	0,000001	0,000002	0,000017	0,000048	0,000226	0,000771	0,003014	0,011055	0,041521	0,154629	0,577435

Теперь найдем математическое ожидание непосредственно, зная все вероятности от $p_{-10,10}$ до $p_{10,10}$:

$$\mathrm{E}\,X_n = 0\cdot p_{0,10} + 1\cdot\left(p_{1,10} + p_{-1,10}\right) + \ldots + 10\cdot\left(p_{10,10} + p_{-10,10}\right) = 2p_{1,10} + 4p_{2,10} + \ldots + 20p_{10,10}.$$

Расчёт на калькуляторе или компьютере дает значение 0,577 с округлением до тысячных.

Комментарий. Можно показать, что $\mathrm{E}\,X_n = \frac{1}{2}\mathrm{E}\,X_{n-1} + \frac{1}{2}p_{0,n-1}$, где $p_{0,n-1}$ — вероятность того, что в конце $n-1$-го дня у кота и лисы монет поровну. Если использовать эту формулу, то достаточно найти только те вероятности, что выделены в таблице цветом фона. Можно ещё сократить вычисления и строить только правую часть таблицы, поскольку таблица симметрична.

Ответ: прибл. 0,577.

16. Пятьдесят карточек (от 9 класса, 3 балла). На стол в ряд выложили 50 карточек, пронумерованных слева направо числами от 1 до 50. Снизу карточки синие, а сверху – красные. Вася выбирает случайным образом 25 карточек, лежащих подряд (фрагмент ряда), и переворачивает их. Затем к столу подходит Ася и делает то же самое – выбирает случайный фрагмент из 25 карточек, лежащих подряд, и переворачивает их, независимо от того, что делал раньше Вася. У какой карточки (или карточек) вероятность оказаться красной стороной вверх после всех переворачиваний меньше, чем у других?

Решение. Случайный выбор фрагмента из 25 карточек означает случайный выбор первой (самой левой) карточки в этом фрагменте. С равными шансами эта карточка может иметь номер от 1 до 26.

Рассмотрим карточку № 1. Вероятность того, что её перевернёт Вася, равна $1/26$ (только если фрагмент начинается с карточки № 1). Вероятность, что её перевернёт Ася, такая же. Значит, первая карточка в конце окажется красной стороной вверх (не перевёрнута ни разу или перевёрнута два раза) с вероятностью

$$p_1 = \left(1-\frac{1}{26}\right)^2 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 = \frac{2}{26^2} - \frac{2}{26} + 1 = \frac{1}{338} - \frac{1}{13} + 1.$$

Возьмём карточку № 2 и будем рассуждать так же: Вася её переворачивает с вероятностью $\frac{2}{26}$ (если фрагмент начинается с карточки № 1 или с карточки № 2). С такой же вероятностью её перевернёт Ася. Значит, карточка № 2 окажется лежащей красной стороной вверх с вероятностью

$$p_2 = \left(1-\frac{2}{26}\right)^2 + \left(\frac{2}{26}\right)^2 = \frac{1}{338}\cdot 2^2 - \frac{1}{13}\cdot 2 + 1.$$

Такое рассуждение верно для всех карточек вплоть до 25-й: при $1 \le k \le 25$

$$p_k = \frac{1}{338}k^2 - \frac{1}{13}k + 1.$$

Для карточек с номерами от 26 до 50 вероятности такие же, только в обратном порядке: у карточки № 50 – такая же, как у № 1, у № 49 – такая же, как у № 2, и так далее. Это легко видеть, если пронумеровать карточки в обратном порядке.

Требуется найти наименьшую из вероятностей p_k. Функция

$$f(x) = \frac{1}{338}x^2 - \frac{1}{13}x + 1$$

принимает наименьшее значение в точке $x_0 = \frac{1}{13} : \frac{2\cdot 1}{338} = \frac{26}{2} = 13$. Следовательно, наименее вероятно, что красной стороной вверх будут лежать тринадцатая карточка слева и тринадцатая справа (38-я слева).

Примечание. Окончание решения может опираться не на исследование функции, но и на иные соображения, например, на теорему о средних:

$$\sqrt{\frac{p_k}{2}}=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{k}{26}\right)^2+\left(\frac{k}{26}\right)^2}{2}}\ge\frac{1-\frac{k}{26}+\frac{k}{26}}{2}=\frac{1}{2},$$

поэтому наименьшая из вероятностей $p_k=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2=\frac{1}{2}$ при условии $1-\frac{k}{26}=\frac{k}{26}$, откуда $k=13$.

Ответ: у 13-й и 38-й.

17. Три прогноза (от 9-го класса. 4 балла). Дни в Анчурии бывают ясные и дождливые, причём вероятность ясного дня равна 0,74 независимо от времени года. В парламенте Анчурии есть комитет по климату и прогнозам, где работают два сенатора и один приглашённый синоптик. Известно, что доля верных прогнозов ясных дней у каждого из трёх такая же, как и доля верных прогнозов дождливых. Но у синоптика эта доля на 50% выше, чем у каждого из сенаторов.

Однажды все трое независимо друг от друга сделали прогноз на приближающийся День Великого Народного Ликования. Оба сенатора заявили, что этот день будет ясный, а синоптик предсказал дождь. На какой прогноз лучше полагаться?

Решение. Пусть событие G «День ВНЛ будет ясным», событие M_1 «первый сенатор дал прогноз “ясно”», событие M_2 «второй сенатор дал прогноз “ясно”», а событие S «синоптик дал прогноз “дождь”». Пусть

$$\mathrm{P}\left(M_1|G\right)=\mathrm{P}\left(M_2|G\right)=p.$$

Тогда из условия следует, что

$$\mathrm{P}\left(S|\bar{G}\right)=\mathrm{P}\left(\bar{S}|G\right)=1{,}5p,$$

$$\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2|G\right)=\mathrm{P}\left(S|G\right)\cdot\mathrm{P}\left(M_1|G\right)\cdot\mathrm{P}\left(M_2|G\right)=\left(1-1{,}5p\right)p^2$$

и

$$\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2|\bar{G}\right)=\mathrm{P}\left(S|\bar{G}\right)\cdot\mathrm{P}\left(M_1|\bar{G}\right)\cdot\mathrm{P}\left(M_2|\bar{G}\right)=1{,}5p\left(1-p\right)^2.$$

Чтобы понять, какой прогноз лучше, сравним условные вероятности

$$\mathrm{P}\left(\bar{G}|S\cap M_1\cap M_2\right)=\frac{\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2|\bar{G}\right)\mathrm{P}\left(\bar{G}\right)}{\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\right)}$$

и

$$\mathrm{P}\left(G|S\cap M_1\cap M_2\right)=\frac{\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2|G\right)\mathrm{P}\left(G\right)}{\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\right)}.$$

Если вероятность первая выше, то прогноз синоптика лучше; если вторая больше, то, скорее всего, правы сенаторы.

Введём обозначение $\mathrm{P}(G)=r$ (по условию $r=0{,}74$). Тогда

$$\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\middle|\bar{G}\right)\mathrm{P}(\bar{G})=1{,}5p(1-p)^2(1-r)\quad\text{и}$$

$$\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\middle|G\right)\mathrm{P}(G)=(1-1{,}5p)\,p^2r\,.$$

Составим разность:

$$\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\middle|\bar{G}\right)\mathrm{P}(\bar{G})-\mathrm{P}\left(S\cap M_1\cap M_2\middle|G\right)\mathrm{P}(G)=$$

$$=1{,}5p(1-p)^2(1-r)-(1-1{,}5p)\,p^2r=$$

$$=1{,}5p\left(1-2p+p^2\right)-1{,}5rp\left(1-2p+p^2\right)-(1-1{,}5p)\,p^2r=$$

$$=1{,}5p-3p^2+1{,}5p^3-1{,}5rp+3rp^2-p^2r=p\left(1{,}5p^2+(2r-3)\,p+1{,}5(1-r)\right).$$

Подставляя $r=0{,}74$, получаем:

$$p\left(1{,}5p^2-1{,}52p+0{,}39\right).$$

Дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего в скобках, равен

$$1{,}52^2-4\cdot1{,}5\cdot0{,}39=-0{,}0296<0\,.$$

Следовательно, при всех возможных вероятностях p (от 0 до 2/3)

$$\mathrm{P}\left(\bar{G}\middle|S\cap M_1\cap M_2\right)-\mathrm{P}\left(G\middle|S\cap M_1\cap M_2\right)>0\,,$$

то есть в данном случае лучше положиться на прогноз одного специалиста, чем двух политиков.

Ответ: на прогноз синоптика.

18. Парадокс последнего броска (от 9-го класса. 4 балла). Правильную игральную кость бросают до тех пор, пока сумма последовательно выпадающих очков не достигнет числа 2019 (станет равна 2019 или больше). Докажите, что вероятность события «при последнем броске выпадет 6 очков» больше[5], чем 1/6.

Комментарий. Казалось бы, утверждение задачи парадоксально – последний бросок никак не зависит от предыдущих, и поэтому вероятность выпадения 6 очков должна равняться 1/6. Чтобы понять ошибочность этого рассуждения, проведём аналогию с монетой. Пусть её подбрасывают до тех пор, пока не выпадет орёл. Как только орёл выпал, броски прекращаются. Последний бросок обязательно оканчивается орлом, поэтому при последнем броске вероятность орла равна 1, а не 1/2. В случае с костью смещение вероятности не такое большое, но тоже присутствует.

Решение. В условиях эксперимента перед последним броском сумма последовательно выпадавших очков Y стала равна одному из чисел

$$n-6,\,n-5,\,\ldots,\,n-1.$$

[5] Утверждение задачи выглядит парадоксально – последний бросок ничем не хуже никакого из предыдущих и не зависит от них. Казалось бы, число 6 выпадает с вероятностью 1/6 независимо от того, первый это бросок или последний.

Введём краткие обозначения для вероятностей этих шести событий: $p_{n-k} = \mathrm{P}(Y = n-k)$. Очевидно, $p_{n-1} + p_{n-2} + \ldots + p_{n-6} = 1$.

Пусть последний бросок дал S очков, причем оказалось, что $Y + S \geq n$. Оценим при этом условии вероятность события $S = 6$. Разобьём ее в сумму шести вероятностей:

$$\mathrm{P}\left(S = 6 \middle| Y + S \geq n\right) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}\left(S = 6 \cap Y = n-k \middle| S \geq k\right).$$

События $S = 6$ и $Y = n-k$ независимы, поскольку первое относится только к последнему броску, а второе – ко всем броскам, кроме последнего. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(S = 6 \middle| Y + S \geq n\right) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}\left(S = 6 \middle| S \geq k\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y = n-k \middle| S \geq k\right).$$

По той же причине

$$\mathrm{P}\left(Y = n-k \middle| S \geq k\right) = \mathrm{P}\left(Y = n-k\right) = p_{n-k}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}\left(S = 6 \middle| Y + S \geq n\right) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}\left(S = 6 \middle| S \geq k\right) p_{n-k} = \sum_{k=1}^{6} \frac{\mathrm{P}\left(S = 6 \cap S \geq k\right)}{\mathrm{P}\left(S \geq k\right)} p_{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{\mathrm{P}\left(S = 6\right)}{\mathrm{P}\left(S \geq k\right)} p_{n-k} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{\mathrm{P}\left(S \geq k\right)} p_{n-k} > \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} p_{n-k} = \frac{1}{6}.$$

19. Одноцветные пары. В ящике n белых и n черных шаров. Шары достают из ящика по два шара за раз – случайными парами.

а) **(от 9-го класса. 2 балла).** Найдите математическое ожидание числа разноцветных пар, извлечённых из ящика к моменту, когда ящик опустел.

б) **(от 9-го класса. 5 баллов).** Предположим, что если пара разноцветная, то её откладывают в сторону, а если одноцветная, то её возвращают в ящик. Такую операцию назовем попыткой. Найдите математическое ожидание числа попыток, нужных, чтобы все шары были отложены в сторону, и в ящике ничего не осталось.

Решение. а) Пронумеруем мысленно все чёрные шары. Введём случайную величину I_k – индикатор события A_k «у k-го чёрного шара в паре оказался белый», то есть

$$I_k = \begin{cases} 0, \text{ если событие } A_k \text{ не произошло,} \\ 1, \text{ если событие } A_k \text{ произошло.} \end{cases}$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно

$$\mathrm{E}\, I_k = \mathrm{P}\left(A_k\right) = \frac{n}{2n-1}.$$

Случайная величина X_n «количество разноцветных пар» равна сумме всех n индикаторов:

$$X_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

Перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}\,I_1 + \mathrm{E}\,I_2 + \ldots + \mathrm{E}\,I_n = n \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n^2}{2n-1}.$$

б) Обозначим нужное число попыток X_n. Пусть I – индикатор события «при первой попытке появилась разноцветная пара», то есть

$$I = \begin{cases} 0, \text{ если первая пара одноцветная,} \\ 1, \text{ если первая пара разноцветная.} \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины I равно

$$\mathrm{E}\,I = \mathrm{P}(I=1) = \frac{n}{2n-1}.$$

После того, как первая попытка сделана, в ящике остаётся k пар: $k=n$, если в первой попытке пара вернулась в ящик, или $k=n-1$, если пара была убрана. Поэтому возникает новая случайная величина Y_k «число попыток, нужных, чтобы отложить k пар шаров, оставшихся после первой попытки». Тогда

$$X_n = IY_{n-1} + (1-I)Y_n + 1.$$

В силу независимости I и Y_k

$$\mathrm{E}\,X_n = 1 + \mathrm{E}\,I \cdot \mathrm{E}\,Y_{n-1} + (1-\mathrm{E}\,I) \cdot \mathrm{E}\,Y_n$$

Введём обозначения $m_k = \mathrm{E}\,Y_k$. При этом $\mathrm{E}\,X_n = \mathrm{E}\,Y_n = m_n$. Получаем:

$$m_n = \frac{n}{2n-1} m_{n-1} + \left(1 - \frac{n}{2n-1}\right) m_n + 1,$$

откуда $m_n = m_{n-1} + 2 - \dfrac{1}{n}$.

Положив для начала рекурсии $m_1 = 1$ (если в ящике 1 белый и 1 чёрный шар, то наверняка потребуется ровно одна попытка) находим:

$$m_2 = 1 + 2 - \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right), \qquad m_3 = \left(2 \cdot 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) + 2 - \frac{1}{3} = 2 \cdot 3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

и так далее:

$$m_n = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 2n - H_n,$$

где $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ – n-е *гармоническое число*.

Комментарий. Известно, что $H_n \approx \ln n + \gamma$, где $\gamma = 0,5772156...$ – *константа Эйлера-Маскерони*. Поэтому можно считать, что

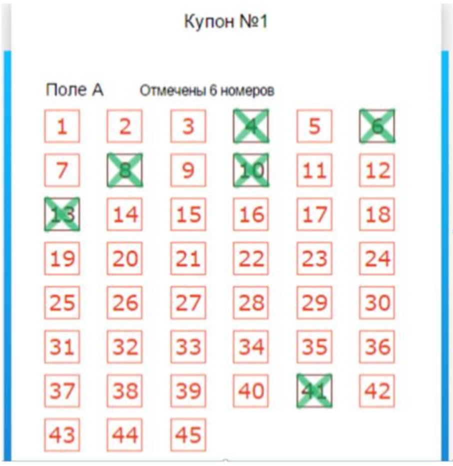
$$m_n \approx 2n - \ln n - \gamma,$$

причём погрешность тем меньше, чем больше n. Например, если в ящике всего 20 шаров ($n = 10$), то по точной формуле находим $m_{10} = 17,071$ (с округлением до тысячных), а приближенная формула даёт $m_{10} \approx 17,120$, то есть погрешность не превышает 0,05.

Ответ: а) $\dfrac{n^2}{2n-1}$; б) $2n - H_n$, где $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} ... + \dfrac{1}{n}$ или, приближённо, $2n - \ln n - 0,577$.

XII ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР

Разбор предложенных эссе



1. **Выигрышная стратегия**. В купоне лотереи «6 из 45» участник зачёркивает шесть из 45 номеров (см. рисунок); порядок значения не имеет, но все выбранные числа разные. Во время тиража случайным образом определяются шесть выигрышных номеров.

В интернете опубликован способ, который, как утверждается, «существенно увеличивает вероятность выигрыша». Автор метода пишет следующее.

«Несложно доказать, что среди выигрышных комбинаций чаще встречаются комбинации с тремя чётными и тремя нечётными номерами, чем комбинации с другим соотношением количества чётных и нечётных. Поэтому игрок, который выбирает комбинацию с тремя чётными и тремя нечётными номерами, имеет больше шансов выиграть по сравнению с тем, кто выбирает номера совершенно случайным образом, не заботясь о том, сколько чётных и нечётных номеров окажется в выбранной комбинации.»

Насколько соответствует действительности это заявление? Правда ли, что, придерживаясь стратегии «чётных и нечётных номеров поровну», можно увеличить шансы на выигрыш? Или это неправда? Всё ли в этом рассуждении неверно? Напишите небольшое эссе, где попытайтесь подробно и убедительно проанализировать предложенную стратегию и сделать выводы.

Возможная идея эссе. Действительно, комбинаций, где чётных и нечётных номеров по три, больше, чем комбинаций с другим соотношением чётных и нечетных. Выяснить это не составляет труда. Таких комбинаций (обозначим их число $K_{3,3}$) всего

$$K_{3,3} = C_{23}^3 C_{22}^3,$$

и это число больше, чем, например,

$$K_{2,4} = C_{23}^2 C_{22}^4 = \frac{23!}{2!\cdot 21!}\cdot\frac{22!}{4!\cdot 18!} = \frac{3}{21}\cdot\frac{23!}{3!\cdot 20!}\cdot\frac{19}{4}\cdot\frac{22!}{3!\cdot 19!} = \frac{3}{21}\cdot\frac{19}{4}\cdot C_{23}^3 C_{22}^3 = \frac{19}{28}K_{3,3}.$$

Точно так же можно показать, что любое другое число комбинаций $K_{j,6-j}$, где $j \neq 3$, меньше, чем $K_{3,3}$. Так что в этой части автор «метода» прав.

Но что из того, что комбинаций «три-три» больше, чем других? Ровным счётом ничего. Это обстоятельство никак не повышает шансы того, кто придерживается стратегии «три-три».

Выигрышная комбинация с бо́льшей вероятностью имеет три чётных и три нечётных номера, но и невыигрышных комбинаций с таким распределением больше, чем с любым другим. Вероятность того, что любая наперёд заданная комбинация окажется выигрышной равна $1/C_{45}^6$, независимо от того, сколько в ней чётных номеров и как они чередуются с нечётными.

Комментарий. К сожалению, не было ни одного эссе, где эти мысли прозвучали бы ясно и без ошибок. Было несколько сочинений, где авторы высказывали близкие мысли, но ошибались в подсчете числа комбинаций 3 – 3 или вероятностей получить такую комбинацию при случайном выборе. Максимальный балл за эссе по этой теме, что мы смогли поставить, был 3 из 10. Это означает, что эссе есть, и в нём немало слов.

2. Симметризация кости. Пират Питер предлагает пирату Биллу сыграть в кости, пока на море штиль и делать нечего. Кости у них есть, но одна из них очень старая, края неровные. И вообще, она жульническая – вероятности выпадения разных граней разные. Ситуацию нужно исправить.

Питер предложил подровнять кость напильником, правда тогда она уменьшится. Билл немного подумал и сказал, что ничего пилить не нужно, мол, есть математический способ, как с помощью несимметричной кости добиться почти или даже совсем равных вероятностей получения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.

Что мог придумать Билл? Мы знаем, что прежде Билл преподавал теорию вероятностей в университете, но потом захотел тихой, спокойной жизни и пошёл в пираты. Напишите подробное и взвешенное сочинение на эту тему. Хорошо бы не только описать метод, но и получить количественные оценки. Например, можно ли (и как) сделать так, чтобы вероятности получения наиболее и наименее вероятного числа отличались бы менее чем на 0,01 или на 0,001? А может быть удастся сделать числа от 1 до 6 равновероятными?

Эссе участника олимпиады Романа Трапезникова (Казань, 7 класс)[1]

Мы решили помочь Биллу и Питеру, и придумали, как с помощью любой кости (пусть даже и с неравными гранями) получать числа от 1 до 6 с равными вероятностями. Для этого мы бросаем кость три раза. Если хотя бы одно число очков выпало дважды, бросаем ещё три раза и продолжаем бросать по три раза до тех пор, пока не выпадет три различных числа очков[2].

Теперь заменим выпавшие очки их *рангами*, то есть числами 1, 2 и 3. Наименьшее выпавшее число очков заменяем числом 1, второе по величине – числом 2, а наибольшее – числом 3. Например, если выпала комбинация $(3,6,2)$, получается упорядоченная тройка $(2,3,1)$.

Заметим, что порядки полученных троек (их 6 штук – (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) и (3,2,1)) случаются с равной вероятностью, так как

[1] Эссе отредактировано, при этом мы старались сохранить авторский текст настолько, насколько это возможно.

[2] Роман предлагает действовать иначе. Он пишет: «Для этого мы бросаем кость до тех пор, пока не выпадет тройка идущих подряд различных чисел, то есть если выпала последовательность (1, 3, 3, 3, 5, 4), то считаем, что выпало (3,4,5)». Алгоритм Романа тоже интересен, но, к сожалению, не приводит к равновероятным исходам: например, комбинации (3,4,5) и (4,3,5) могут быть не равновероятны. Поэтому мы заменили способ бросания кости, сохранив основную идею.

каждая грань кости выпадает с одной и той же вероятностью, независимо от того, какой по счёту она выпало. То есть, если выпали очки a,b,c, вероятности которых p_a, p_b и p_c соответственно, то вероятность выпадения комбинации (a,b,c) равна $p_a p_b p_c$, а другой комбинации, например, (b,c,a) – $p_b p_c p_a$, только множители в другом порядке, а так это то же самое $p_a p_b p_c$.

Теперь установим соответствие между числами от 1 до 6 и упорядоченными тройками.

Число	1	2	3	4	5	6
Комбинация	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$

Для проведения эксперимента мы вылепили неправильную кость из солёного теста (рис. 1). Для определения относительной частоты (примерной вероятности) выпадения каждой грани мы бросили кость 100 раз и зафиксировали количество выпадений каждой грани. Результаты занесли в таблицу.

Рис. 1. Неправильная игральная кость

Число очков	1	2	3	4	5	6
Количество	15	31	10	7	24	13

Таким образом, мы убедились в том, что кость действительно неправильная. Вероятность выпадения 1 очка примерно равна 0,15, вероятность 2 очков – 0,31 и т.д.

Мы опробовали нашу кость в простой игре-бродилке. Игра удалась. Чтобы сделать ход, каждому игроку приходилось бросать кость 3 – 6 раз, что не очень затруднительно[3]. Вначале приходилось заглядывать в таблицу-шпаргалку перевода комбинаций в число очков. Потом эти комбинации запомнились.

Таким образом, Биллу и Питеру можно воспользоваться предложенным методом для игры в кости.

Замечание. Я бы все же воспользовался напильником, ведь даже если можно играть и так, то с правильной костью игра значительно ускорится.

[3] Математическое ожидание числа бросков равно 5,4.

3. Задача замечательного математика. Один замечательный математик решал следующую замечательную задачу.

Внутри круга отмечена точка M, а на границе круга независимо друг от друга выбраны три случайные точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC «накроет» точку M, то есть точка M будет принадлежать треугольной области ABC ?

Сначала математик решил задачу в случае, когда точка *M* – центр круга. Вероятность оказалась равна 0,25. Потом математик доказал, что эта вероятность не зависит от положения точки *M* внутри круга. Вот это доказательство.

Доказательство. *Пусть точка M разбивает диаметр круга KL на неравные отрезки $KM = a$ и $ML = b$ (см. рис.1). Выберем на границе круга три случайные точки A, B и C.*

Построим треугольник KSL со стороной $KL = a + b$ и отношением сторон $SK : SL = a : b$. Тогда отрезок SM служит биссектрисой этого треугольника. Построим равнобедренный треугольник ESD так, что точки E и D лежат на лучах SK и SL соответственно. На рис. 2 точки E и D лежат на продолжениях сторон SK и SL, но это не обязательно. Биссектриса SM угла ESD перпендикулярна отрезку ED и пересекает этот отрезок посередине в точке M_1.

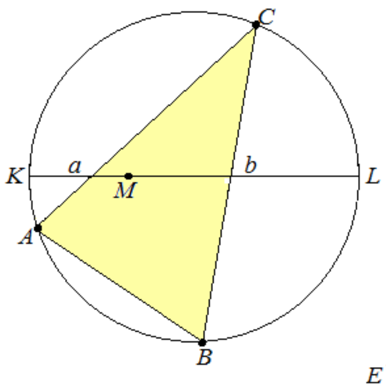


Рис. 1.

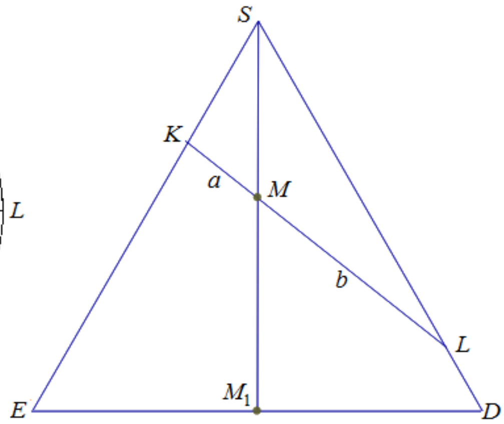


Рис. 2.

Теперь будем вращать треугольник ESD вокруг прямой SM_1. Получится конус, в основании которого окружность с центром M_1. Через прямую KL проведем плоскость, которая пересекает плоскость основания конуса по прямой, перпендикулярной диаметру ED. Сечение конуса этой плоскостью – эллипс, у которого отрезок KL является бóльшим диаметром (рис. 3).

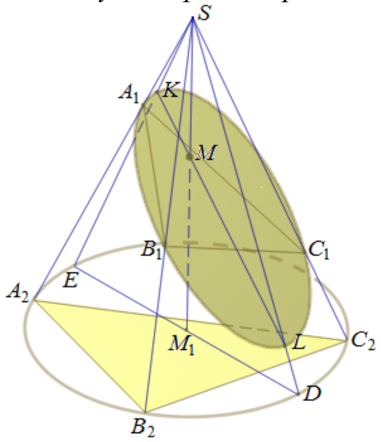


Рис. 3.

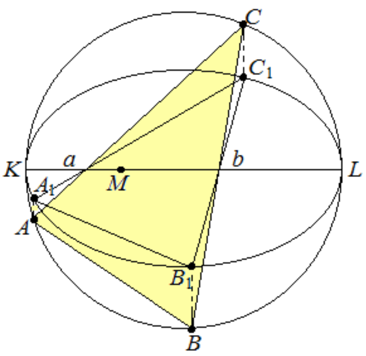


Рис. 4.

Вернёмся к первоначальному кругу и впишем в него эллипс, равный тому, что получился в конусе (рис.4). Параллельным проектированием точек A, B, C в направлении, перпендикулярном диаметру KL, получим на эллипсе точки A_1, B_1 и C_1.

Отметим точки A_1, B_1 и C_1 на эллипсе, который является сечением в конусе, и спроектируем их из вершины S на окружность основания конуса в точки A_2, B_2 и C_2.

Точки A, B и C – случайные точки на окружности, значит, точки A_1, B_1 и C_1 – случайно выбранные точки на эллипсе, а поэтому точки A_2, B_2 и C_2 – случайные точки на окружности основания конуса.

Точка M лежит внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда центр основания конуса M_1 лежит внутри треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому $\mathrm{P}(M \in ABC) = \mathrm{P}(M_1 \in A_2B_2C_2) = 0,25$.

Значит, вероятность того, что треугольник ABC накроет точку, лежащую внутри круга, всегда равна 0,25, независимо от выбора точки.

Рассуждение, безусловно, красивое и примечательное, но нет ли в нём ошибок? Если есть, то какие? Это первый вопрос.

Но есть и второй вопрос. Даже если математик где-то ошибся в решении, это не значит, что он ошибся в ответе. Может быть, вероятность действительно не зависит от выбора точки *M* внутри круга. Так зависит или нет?

Попробуйте разобраться в доказательстве, привлекая необходимые геометрические сведения, разобраться в вероятностной части рассуждения и подробно и убедительно ответить на эти два вопроса.

Возможная идея эссе. Рассуждения действительно интересны. И до определённого момента верны: действительно, если точка M центр круга, то случайный вписанный треугольник накрывает ее с вероятностью 0,25.

К сожалению, на этом верные рассуждения заканчиваются. В основе «доказательства» лежат два проектирования. Первое – параллельное, в направлении, перпендикулярному большему диаметру эллипса (рис.4), второе – центральное с центром в вершине конуса (рис.3). Оба эти проектирования не сохраняют длины дуг. Иными словами две дуги одной и той же длины на окружности переходят в дуги разных длин на эллипсе при первом проектировании, а потом – в разные по длине дуги окружности при втором.

Поэтому случайный треугольник, который был сначала, преобразуется в не совсем неслучайный треугольник: положения трех его вершин уже не является равномерно распределёнными на окружности. Таким образом, рассуждение ошибочно.

Чтобы понять, что вероятность накрытия зависит от выбора точки M, сложных рассуждений не требуется. Если эта вероятность постоянна и равна 0,25 для всех точек внутри круга, то она должна быть равна 0,25 и для точки M, лежащей на границе круга или сколь угодно близко к ней. Не составляет труда видеть, что если точка M на границе круга, то треугольник накроет её, только если он случайно попадет одной из своих вершин в точку M, а вероятность этого равна нулю.

Комментарий. К сожалению, нее нашлось ни одного участника, кто, взявшись за эту действительно непростую тему, сумел бы найти ошибки в доказательстве.

Оргкомитет благодарит за истинно английское чувство юмора участницу олимпиады, которая написала очень короткое эссе: «Математик совершенно прав: я решила эту задачу, и у меня получилось точно так же».