Пригласительный тур XII олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

Ответы и решения

Вариант 1

1. 5. **2.** АВ, ЖГ, БД или АЖ, БГ, ВД. **3.** $\frac{217}{729}$ (прибл. 0,298).

4. Решение. Первый может быть прав. Пусть, например, в первой коробке было 4 конфеты белого шоколада из 7, а во второй — 3 белые конфеты из 5. Тогда в мешке всего 7 белых конфет из 12. Второй тоже может быть прав: если в первой коробке было 8 белых конфет из 14, а во второй 3 белые из 5, то всего в мешке 11 белых конфет из 19. Третий математик не может быть прав, поскольку вероятность вынуть из мешка белую конфету должна быть заключена между числами $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{5}$, но $\frac{19}{35}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$. Противоречие.

Ответ: могут оказаться правы первый и второй математики; третий неправ.

Комментарий. Возможны другие способы решения. Например, задачу можно решить с помощью системы уравнений.

Критерии оценивания

Обоснована правота/неправота всех троих	3 балла
Обоснована правота/неправота двоих	2 балла
Обоснована правота/неправота только одного	1 балл
Только ответ (верный или неверный) без обоснований	0 баллов

5. Решение. Пусть вероятности орла и решки равны соответственно p и $q=1-p$. Составим равенство

$$C_{10}^{7}p^{7}q^{3}=C_{10}^{6}p^{6}q^{4},$$

из которого следует: $120p=210q$; $\frac{p}{q}=\frac{7}{4}$; $p=\frac{7}{11}$.

Ответ: $\frac{7}{11}$.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	2 балла
Составлено верное равенство, но допущена ошибка или решение не доведено до конца	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

6. Решение. Удобно считать, что баран валит столб, к которому прикреплены две соседние секции ограды. Тогда мы получаем серию из 7 испытаний Бернулли, где успехом является удар, в результате которого повален один из двух столбов, к которым крепится красная секция. Вероятность успеха равна $\frac{2}{7}$. Вероятность того, что красная секция ни разу не пострадает (случится 0 успехов), равна $\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^7 \approx 0{,}095$.

Ответ: $\left(\frac{5}{7}\right)^7$ (прибл. 0,095).

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	2 балла
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

7. Решение. Предположим для ясности рассуждений, что при поклёвке Рассеянный Учёный тут же вытаскивает и снова забрасывает удочку, причём делает это моментально. После этого он снова ждёт. Рассмотрим промежуток времени 6 минут. За это время на первой удочке случается в среднем 3 поклёвки, а на второй — 2 поклёвки. Тогда всего на обеих удочках за эти 6 минут случается в среднем 5 поклёвок. Следовательно, среднее время ожидания первой поклёвки равно $6:5=1{,}2$ минуты.

Ответ: 1 минута 12 секунд.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	3 балла
Показано, что в среднем случается 5 поклёвок за 6 минут, или доказано эквивалентное утверждение	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

8. Решение.

а) Предположим, что в наборе 9 чисел. Тогда пять из них не превосходят медиану, то есть число 2. Ещё четыре числа не больше, чем число 13. Тогда сумма всех чисел набора не больше, чем

$$5\cdot 2+4\cdot 13=62.$$

Поскольку среднее арифметическое равно 7, сумма чисел набора равна $7\cdot 9=63$. Противоречие. Набор не может состоять из 9 чисел.

б) Пусть количество чисел в наборе равно $2n+1$ (n натуральное). В наборе найдётся ровно $n+1$ число, каждое из которых не больше медианы, то есть числа 2. Оставшиеся n чисел не превосходят числа 13. Тогда сумма всех чисел набора не больше, чем

$$13n+2(n+1)=15n+2.$$

С другой стороны, эта сумма равна $7(2n+1)=14n+7$. Из неравенства $14n+7\le 15n+2$ получаем, что $n\ge 5$. Следовательно, в наборе не меньше чем $2\cdot 5+1=11$ чисел. Приведём пример, чтобы показать, что такое возможно. Набор

$$2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 13;\ 13;\ 13;\ 13;\ 13$$

состоит из 11 чисел и удовлетворяет условиям 1 — 4.

Ответ: а) нет; б) 11.

Критерии оценивания

Верно решены оба пункта или только пункт (б)	3 балла
Найдена верная оценка количества чисел в пункте (б), но нет примера	2 балла
Верно решён пункт (а)	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

9. Решение. Есть множество способов решить задачу.

Способ 1. Пусть вероятности орла и решки равны p и $q = 1 - p$ соответственно. До изменения правил игра была справедливой: при двух последовательных бросках А. и Б. в среднем получали нулевой выигрыш. Рассмотрим два последовательных броска после изменения правил. Выигрыш игрока А. в этих двух бросках может быть 0 пряников (А. выбросил орла и Б. выбросил орла или А. выбросил решку, а Б. выбросил орла). Выигрыш А. может оказаться равен 1 прянику (А. выбросил орла, а Б. — решку). Выигрыш А. может оказаться равен -1 прянику (у А. выпала решка и у Б. тоже). Запишем распределение случайной величины «выигрыш А.»:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ q^2 & p^2 + qp & pq \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание выигрыша А. равно

$$\mathrm{E}X = -q^2 + pq = (2p - 1)q.$$

Поскольку $p > 1/2$, полученная величина положительна: $\mathrm{E}X = (2p - 1)q > 0$. Следовательно, А. получает преимущество.

Способ 2. Рассмотрим пару бросков — сначала бросает монету А., затем — Б. Если Б. выбросил орла, то выигрыш обоих в этой паре бросков нулевой. Значит, нужно рассмотреть только случай, когда Б. выбрасывает в свой черёд решку. Он в этом случае выигрывает пряник, если А. перед ним тоже выбросил решку (вероятность такого исхода равна q^2), или проигрывает пряник, если А. перед ним выбросил орла (вероятность этого равна pq). По условию $p > 1/2$, поэтому $q < p$, значит, $q^2 < pq$. Таким образом, в каждой паре бросков у игрока Б. вероятность выигрыша ниже вероятности проигрыша. При длительной игре А., скорее всего, выиграет у Б.

Ответ: А. получает преимущество.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	3 балла
Показано, что после изменения правил у игрока Б. уменьшается вероятность получить пряник при своём броске, но не показано, что А. получает преимущество перед Б.	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

Вариант 2

1. 6. **2.** Любой из 12 вариантов: АЖГБДВ, эта же последовательность в обратном порядке и все повороты этих посадок. **3.** $\frac{17}{81}$ (прибл. 0,21).

4. Решение. Первый может быть прав. Пусть, например, в первом пакетике было 2 синих леденца из 5, а во втором — 3 синих леденца из 8. Тогда в коробке всего 5 синих леденцов из 13. Второй тоже может быть прав: например, если в первом пакетике было 4 синих леденца из 10, а во втором 3 синих из 8, то всего в коробке 7 синих леденцов из 18. Третий математик не может быть прав, поскольку вероятность вынуть из коробки синий леденец должна быть заключена между числами $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{5}$, но $\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{17}{40}$. Противоречие.

Ответ: могут оказаться правы первый и второй математики; третий неправ.

Комментарий. Возможны другие способы решения. Например, задачу можно решить с помощью системы уравнений.

Критерии оценивания

Обоснована правота/неправота всех троих	3 балла
Обоснована правота/неправота двоих	2 балла
Обоснована правота/неправота только одного	1 балл
Только ответ (верный или неверный) без обоснований	0 баллов

5. Решение. Пусть вероятности орла и решки равны соответственно p и $q=1-p$. Составим равенство

$$C_{10}^5 p^5 q^5 = C_{10}^6 p^6 q^4,$$

из которого находим: $252q = 210p$; $\frac{p}{q}=\frac{6}{5}$; $p=\frac{6}{11}$.

Ответ: $\frac{6}{11}$.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	2 балла
Составлено верное равенство, но допущена ошибка или решение не доведено до конца	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

6. Решение. Удобно считать, что баран валит столб, к которому прикреплены две соседние секции ограды. Тогда мы получаем серию из 7 испытаний Бернулли, где успехом является удар, в результате которого повален один из двух столбов, к которым крепится синяя секция. Вероятность успеха равна $2/7$. Вероятность того, что синяя секция пострадает все семь дней (случится 7 успехов), равна $\left(\frac{2}{7}\right)^7\left(\frac{5}{7}\right)^0 \approx 0{,}00016$.

Ответ: $\left(\frac{2}{7}\right)^7$ (прибл. 0,00016).

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	2 балла
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

7. Решение. Ясности ради будем считать, что при поклёвке Рассеянный Учёный тут же вытаскивает и снова забрасывает удочку, причём делает это моментально. После этого он снова ждёт. Рассмотрим промежуток времени 5 минут. За это время на первой удочке случается в среднем 5 поклёвок, а на второй — 1 поклёвка. Тогда всего на обеих удочках за эти 5 минут случается в среднем 6 поклёвок. Следовательно, среднее время ожидания первой поклёвки равно $\frac{5}{6}$ минуты.

Ответ: 50 секунд.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	3 балла
Показано, что в среднем случается 5 поклёвок за 6 минут, или доказано эквивалентное утверждение	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

8. Решение.

а) Предположим, что в наборе 7 чисел. Тогда четыре из них не меньше медианы, то есть числа 10. Ещё три числа не меньше единицы. Тогда сумма всех чисел набора не меньше, чем

$$3+4\times 10=43.$$

Поскольку среднее арифметическое равно 6, сумма чисел набора равна $6\times 7=42$. Противоречие. Набор не может состоять из 7 чисел.

б) Пусть количество чисел в наборе равно $2n+1$ (n натуральное). В наборе найдётся ровно $n+1$ число, каждое из которых не меньше медианы, то есть числа 10. Оставшиеся n чисел не меньше числа 1. Тогда сумма всех чисел набора не меньше, чем

$$n+10(n+1)=11n+10.$$

С другой стороны, эта сумма равна $6(2n+1)=12n+6$. Из неравенства $12n+6\geq 11n+10$ получаем, что $n\geq 4$. Следовательно, в наборе не меньше чем $2\times 4+1=9$ чисел. Приведём пример, чтобы показать, что такое возможно. Набор

$$1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 10;\ 10;\ 10;\ 10;\ 10$$

состоит из 9 чисел и удовлетворяет условиям 1 — 4.

Ответ: а) нет; б) 9.

Критерии оценивания

Верно решены оба пункта или только пункт (б)	3 балла
Найдена верная оценка количества чисел в пункте (б), но нет примера	2 балла
Верно решён пункт (а)	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов

9. Решение.

Способ 1. Пусть вероятности орла и решки равны p и $q=1-p$ соответственно. До изменения правил игра была справедливой: при двух последовательных бросках А. и Б. в среднем получали нулевой выигрыш. Рассмотрим два последовательных броска после изменения правил. Выигрыш игрока А. в этих двух бросках может быть 0 пряников (А. выбросил орла и Б. выбросил орла или А. выбросил решку, а Б. выбросил орла). Выигрыш А. может оказаться равен 1 прянику (А. выбросил орла, а Б. — решку). Выигрыш А. может оказаться равен -1 прянику (у А. выпала решка и у Б. тоже). Запишем распределение случайной величины «выигрыш А.»:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ q^2 & p^2+qp & pq \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание выигрыша А. равно

$$\mathrm{E}X = -q^2 + pq = (2p-1)q.$$

Поскольку $p < 1/2$, полученная величина отрицательна: $\mathrm{E}X = (2p-1)q < 0$. Следовательно, игрок Б. получает преимущество.

Способ 2. Рассмотрим пару бросков — сначала бросает монету А., затем — Б. Если Б. выбросил орла, то выигрыш обоих в этой паре бросков нулевой. Значит, нужно рассмотреть только случай, когда Б. выбрасывает в свой черёд решку. Он в этом случае выигрывает пряник, если А. перед ним тоже выбросил решку (вероятность такого исхода равна q^2) или проигрывает пряник, если А. перед ним выбросил орла (вероятность этого равна pq). По условию $p < 1/2$, поэтому $q > p$, значит, $q^2 > pq$. Таким образом, в каждой паре бросков у игрока Б. вероятность выигрыша выше вероятности проигрыша. При длительной игре Б., скорее всего, выиграет у А.

Ответ: Б. получает преимущество.

Критерии оценивания

Решение верное и обоснованное	3 балла
Показано, что после изменения правил у игрока Б. возрастает вероятность получить пряник при своём броске, но не показано, что Б. получает преимущество перед А.	1 балл
Решение неверно или отсутствует (в частности, дан только ответ)	0 баллов