LXXXIV Московская математическая олимпиада

28 марта 2021 года • 10 класс

Задача 1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

Задача 2. Дана равнобокая трапеция, сумма боковых сторон которой равна большему основанию. Докажите, что острый угол между диагоналями не больше чем $60°$.

Задача 3. Есть бесконечная в одну сторону клетчатая полоска, клетки которой пронумерованы натуральными числами, и мешок с десятью камнями. В клетках полоски камней изначально нет. Можно делать следующее:
— перемещать камень из мешка в первую клетку полоски или обратно;
— если в клетке с номером i лежит камень, то можно переложить камень из мешка в клетку с номером $i+1$ или обратно.
Можно ли, действуя по этим правилам, положить камень в клетку с номером 1000?

Задача 4. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Задача 5. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся на d.

Задача 6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Докажите, что существует такое вещественное число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2.

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIV Московской математической олимпиады —
на сайте `mccme.ru/mmo/`