



## Пригласительный тур XIV олимпиады по теории вероятностей и статистике для школьников

На работу отводится 120 минут. Разрешается использовать калькулятор. Итоги подводятся отдельно для 6–7 классов, 8–9 классов и 10–11 классов.

### Вариант 1

#### Задания с кратким ответом (запишите только ответ)

**1. (От 6 класса, 1 балл)** Среднее арифметическое числового набора из 16 чисел равно 5. Из набора удалили одно число, и среднее арифметическое полученного набора стало равно 4. Какое число удалили?

**2. (От 6 класса, 1 балл)** На музыкальном фестивале жюри голосует за лучшую и худшую песни. Каждый из четырёх судей указывает, какая одна из трёх представленных песен ему очень нравится и какая песня совсем не нравится. Песня, которая наберёт больше всего голосов «очень нравится», будет признана лучшей, а песня, набравшая больше всех голосов «совсем не нравится» — худшей.

К удивлению организаторов, одна и та же песня оказалась признана и лучшей и худшей одновременно. Покажите, как могли проголосовать судьи (достаточно одного примера в таблице).

	Очень нравится песня №	Совсем не нравится песня №
1 судья		
2 судья		
3 судья		
4 судья		

**3. (От 6 класса, 1 балл)** Круговой турнир по анчурьским шашкам проводится в несколько туров. Все игроки разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то один случайный игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое. Они играют между собой последнюю партию, которая выявляет победителя турнира.

В Анчурию на шашечный турнир приехало 27 участников, причем все играют одинаково хорошо, то есть в партии, которую играют любые двое, шансы соперников одинаковы. Известно, что игроку Денису в первом туре не досталось пары. Какова вероятность того, что Денис станет победителем турнира?

**4. (От 6 класса, 1 балл)** Одно время были популярны викторины, напоминающие телевизионную игру «Брейн-ринг». В викторине участвует несколько команд, а сама игра состоит из нескольких боёв. Очередность вступления команд в игру определяется жеребьёвкой. Сначала между собой играют команды № 1 и № 2. Ничья невозможна, проигравшая команда выбывает, а победитель играет с командой № 3. Проигравшая команда выбывает, победитель встречается с командой № 4 и так далее. Победителем игры является команда, выигравшая последний бой.

Предположим, что в викторине «Брейн-ринг» встречаются шесть абсолютно одинаковых по силе команд, то есть в любом бою шансы противников одинаковы. Во сколько раз вероятность стать победителем у команды № 6 выше, чем у команды № 4?

**5. (От 7 класса, 1 балл)** Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не станет больше либо равна числу 3. Найдите вероятность того, что при последнем броске выпадет менее четырёх очков.

**6. (От 8 класса, 1 балл)** У Рассеянного Учёного в лаборатории стоит ящик, в котором 112 гаек с правой резьбой и 7 таких же с виду гаек с левой резьбой. Для создания уникальной установки Учёному потребовалось 5 гаек с левой резьбой. Он по очереди вынимает наугад гайки из ящика до тех пор, пока ему не попадутся 5 нужных гаек. Найдите математическое ожидание числа вынутых к этому моменту гаек.

#### Задания с развёрнутым ответом (требуется полное обоснованное решение)

**7. (3 балла)** Изучая статистику, Сергей придумал новый метод вычисления среднего арифметического. Сергей рассуждал так.

*Пусть нам дан набор чисел. Я в уме легко найду среднее двух чисел. Все числа разобью на пары и найду среднее в каждой паре. Если числа целые, буду стараться составлять пары из двух чётных или двух нечётных чисел, чтобы было легче считать. Может быть, у меня останется одно число без пары, но все равно получится набор, в котором меньше чисел. Я его еще раз уменьшу таким же образом и рано или поздно дойду до одного числа.*

Пусть, например, нужно найти среднее арифметическое набора (1, 7, 4, 5, 8). Числа 1 и 7 заменяю их средним 4, числа 4 и 8 заменяю их средним 6, и остаётся число 5 без пары. Получается набор (4, 5, 6). Тогда 4 и 6 заменяю их средним 5. Получается набор (5, 5), поэтому среднее арифметическое данного набора равно 5.

а) (От 6 класса). Покажите, что для вычисления среднего арифметического произвольного числового набора этот способ не годится.

б) (От 7 класса). Друг Сергея Пётр сказал, что способ Сергея верно работает, если в числовом наборе определённое количество чисел, и неважно, каковы сами числа. Правда ли это? Сколько чисел должно быть в наборе, чтобы способ Сергея работал верно?

**8. (От 7 класса, 3 балла)** На хлебозаводе дозирующий автомат отмеряет порции теста массой 400 г. Для проверки оборудования инженер взвесил 10 случайных порций, отмеренных автоматом. Результаты он записал в блокнот, но некоторые цифры стёрлись, и их невозможно прочитать. Мы перенесли в таблицу всё, что удалось восстановить, а нечитаемые цифры заменили знаком вопроса.

Номер порции	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средняя масса
Масса, г	367	364	421	38?	438	40?	39?	378	41?	422	399

Принято правило: если стандартное отклонение сделанных измерений превосходит 10% номинальной массы порции, то дозирующий автомат требует ремонта. Определите, требует ли ремонта данный автомат.

**9. (От 9 класса, 3 балла).** В квадрате с вершиной  $A$  выбирается случайная точка  $B$  и закрашивается прямоугольник с диагональю  $AB$ , две стороны которого лежат на сторонах квадрата. Рассмотрим событие  $G$  «площадь закрашенного прямоугольника меньше половины площади квадрата». Докажите, что

$$0,828 < P(G) < 0,875.$$



Пригласительный тур XIV олимпиады  
по теории вероятностей и статистике для школьников

На работу отводится 120 минут. Разрешается использовать калькулятор. Итоги подводятся отдельно для 6–7 классов, 8–9 классов и 10–11 классов.

Вариант 2

Задания с кратким ответом (запишите только ответ)

**1. (От 6 класса, 1 балл)** Среднее арифметическое числового набора из 13 чисел равно 6. Из набора удалили одно число, и среднее арифметическое полученного набора стало равно 5. Какое число удалили?

**2. (От 6 класса, 1 балл)** На музыкальном фестивале жюри голосует за лучшую и худшую песни. Каждый из четырёх судей указывает, какая одна из четырёх представленных песен ему очень нравится и какая песня совсем не нравится. Песня, которая наберёт больше всего голосов «очень нравится», будет признана лучшей, а песня, набравшая больше всех голосов «совсем не нравится» — худшей.

К удивлению организаторов, одна и та же песня оказалась признана и лучшей и худшей одновременно. Покажите, как могли проголосовать судьи (достаточно одного примера в таблице).

	Очень нравится песня №	Совсем не нравится песня №
1 судья		
2 судья		
3 судья		
4 судья		

**3. (От 6 класса, 1 балл)** Круговой турнир по швамбранским шахматам проводится в несколько туров. Все игроки разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то один случайный игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор,

пока не останутся двое. Они играют между собой последнюю партию, которая выявляет победителя турнира.

В Швамбранию на шахматный турнир приехало 23 участника, причем все играют одинаково хорошо, то есть в партии, которую играют любые двое, шансы соперников одинаковы. Известно, что игроку Олегу при жеребьёвке выпало играть с кем-то из соперников в первом туре. Какова вероятность того, что при этом условии Олег станет победителем турнира?

**4. (От 6 класса, 1 балл)** Одно время были популярны викторины, напоминающие телевизионную игру «Брейн-ринг». В викторине участвует несколько команд, а сама игра состоит из нескольких боёв. Очередность вступления команд в игру определяется жеребьёвкой. Сначала между собой играют команды № 1 и № 2. Ничья невозможна, проигравшая команда выбывает, а победитель играет с командой № 3. Проигравшая команда выбывает, победитель встречается с командой № 4 и так далее. Победителем игры является команда, выигравшая последний бой.

Предположим, что в викторине «Брейн-ринг» встречаются шесть абсолютно одинаковых по силе команд, то есть в любом бою шансы противников одинаковы. Во сколько раз вероятность стать победителем у команды № 6 выше, чем у команды № 3?

**5. (От 7 класса, 1 балл)** Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не станет больше либо равна числу 3. Найдите вероятность того, что при последнем броске выпадет больше трёх очков.

**6. (От 8 класса, 1 балл)** У Рассеянного Учёного в лаборатории стоит ящик, в котором 96 болтов с правой резьбой и 5 таких же с виду болтов с левой резьбой. Для создания уникальной установки Учёному потребовалось 4 болта с левой резьбой. Он по очереди вынимает наугад болты из ящика до тех пор, пока ему не попадутся 4 нужных болта. Найдите математическое ожидание числа вынутых к этому моменту болтов.

#### Задания с развёрнутым ответом (требуется полное обоснованное решение)

**7. (3 балла)** Изучая статистику, Сергей придумал новый метод вычисления среднего арифметического. Сергей рассуждал так.

*Я в уме легко найду среднее двух чисел. Сначала упорядочу все числа. Затем наименьшее и наибольшее числа заменю их средним арифметическим. Потом заменю второе и предпоследнее по величине числа их средним и так далее. Может быть, у меня останется одно число без пары, но все равно получится*

набор, в котором меньше чисел. Я его ещё раз уменьшу таким же образом и рано или поздно дойду до одного числа.

Пусть, например, нужно найти среднее арифметическое набора (9, 2, 6, 5, 8). Упорядочу его: (2, 5, 6, 8, 9). Теперь числа 2 и 9 заменяю их средним 5,5, числа 5 и 8 заменяю их средним 6,5, и остаётся число 6 без пары. Получается набор (5,5, 6, 6,5). Числа 5,5 и 6,5 заменяю их средним 6. Получается набор (6, 6), поэтому среднее арифметическое данного набора равно 6.

а) **(От 6 класса)** Покажите, что для вычисления среднего арифметического произвольного числового набора этот способ не годится.

б) **(От 7 класса)** Друг Сергея Пётр сказал, что способ Сергея верно работает, если в числовом наборе определённое количество чисел, и неважно, каковы сами числа. Прав ли Пётр? Сколько чисел должно быть в наборе, чтобы способ Сергея работал верно?

**8. (От 7 класса, 3 балла)** На хлебозаводе дозирующий автомат отмеряет порции теста массой 400 г. Для проверки оборудования инженер взвесил 10 случайных порций, отмеренных автоматом. Результаты он записал в блокнот, но некоторые цифры стёрлись, и их невозможно прочитать. Мы перенесли в таблицу всё, что удалось восстановить, а нечитаемые цифры заменили знаком вопроса.

Номер порции	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средняя масса
Масса, г	366	426	38?	438	41?	39?	40?	377	374	423	401

Принято правило: если стандартное отклонение сделанных измерений превосходит 10% номинальной массы порции, то дозирующий автомат требует ремонта. Определите, требует ли ремонта данный автомат.

**9. (От 9 класса, 3 балла)** В квадрате с вершиной  $A$  выбирается случайная точка  $B$  и закрашивается прямоугольник с диагональю  $AB$ , две стороны которого лежат на сторонах квадрата. Рассмотрим событие  $H$  «площадь закрашенного прямоугольника больше половины площади квадрата». Докажите, что

$$0,125 < P(H) < 0,172.$$