ММО – 8.

1. (Н. Стрелкова) Незнайка не знает о существовании операций умножения и возведения в степень. Однако он хорошо освоил сложение, вычитание, деление и извлечение квадратного корня, а также умеет пользоваться скобками. Упражняясь, Незнайка выбрал три числа 20, 2 и 2 и составил выражение:

$$\sqrt{(2+20):2}.$$

А может ли он, используя точно те же три числа 20, 2 и 2, составить выражение, значение которого больше 30?

Решение: $\frac{20}{2-\sqrt{2}} = \frac{20(2+\sqrt{2})}{2} = 20 + 10\sqrt{2} > 20 + 10$. Есть и другие решения.

2. (И. Акулич) Найдите наибольшее натуральное n, обладающее следующим свойством: для любого простого нечетного p, меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

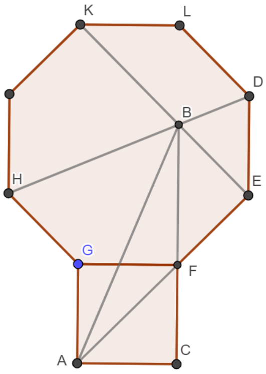
Решение: Ответ: 10. Действительно, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$. Докажем, что числа, большие 10, не годятся. Пусть n – число, большее 10. Заметим, что числа 3, 5, 7 дают разные остатки при делении на 3. Тогда числа $n-3$, $n-5$, $n-7$ дают разные остатки при делении на 3, значит одно из них делится на 3. Осталось заметить, что это число больше, чем 3, поэтому оно составное. Противоречие.

3. (К. Кноп) На стороне правильного восьмиугольника во внешнюю сторону построен квадрат. В восьмиугольнике проведены две диагонали, пересекающиеся в точке B (см. рисунок). Найдите величину угла ABC.

Примечание. Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны.

Решение: Заметим, во-первых, что угол правильного восьмиугольника равен $6 \cdot 180°/8 = 135°$. Обозначим вершины восьмиугольника так, как на рисунке. Заметим, что $KLDE$ равнобокая трапеция, поэтому угол BED равен $45°$, а угол FEB равен $135° - 45° = 90°$. Далее, HD - ось симметрии восьмиугольника, поэтому угол HDE равен $135°/2 = 67,5°$. Отсюда получается, что в треугольнике BDE углы B и D равны, а значит $EB = ED = EF = FC$. Треугольники BEF и FCA равны по двум катетам, значит $BF = FA$. Далее, угол F равнобедренного прямоугольного треугольника BEF равен $45°$, поэтому угол GFB прямой. Угол AFB равен сумме углов AFG и GFB, то есть $135°$. Теперь заметим, что сумма равных углов FBA и FAB равна $45°$, значит угол ABC равен $45°/2 = 22,5°$.

Ответ: $22,5°$.



4. (Н. Медведь) У входа на рынок есть двухчашечные весы без гирек, которыми каждый может воспользоваться по 2 раза в день. У торговца Александра есть 3 неотличимые внешне монеты весом 9, 10 и 11 граммов.

— Как жаль, что я не могу за 2 взвешивания разобраться, какая из моих монет сколько весит!

— Да! — поддакнул его сосед Борис. — У меня совершенно та же ситуация — тоже 3 неотличимые на вид монеты весом 9, 10 и 11 граммов!

Докажите, что если они объединят усилия, то за отведённые им 4 взвешивания определят веса всех шести монет.

Решение: Назовем монеты первого торговца A1, B1, C1, монеты второго – A2, B2, C2.

1 взвешивание: A1 и A2

2 взвешивание: B1 и B2

Возможные результаты (с точностью до нумерации торговцев):

1. A1=A2, B1=B2 $\Longrightarrow$ C1=C2 (см. рис. 1).

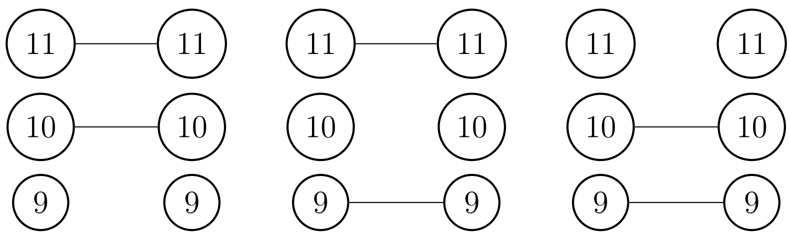


Рис. 1: Возможные варианты того, какие монеты взвешивали, для случая 1. Кружки обозначают монеты, линии – взвешивания.

   Тогда 3 взвешивание должно быть A1+B1 ? C1+C2.

   (a) A1+B1 > C1+C2 $\Longrightarrow$ C1=C2=9, A и B – 10 и 11 в каком-то порядке;
   (b) A1+B1 = C1+C2 $\Longrightarrow$ C1=C2=10, A и B – 9 и 11 в каком-то порядке;
   (c) A1+B1 < C1+C2 $\Longrightarrow$ C1=C2=11, A и B – 9 и 10 в каком-то порядке.

   4 взвешивание: A1 ? B1.

2. A1=A2, B1<B2 $\Longrightarrow$ C1>C2 $\Longrightarrow$ получаем соответствие: B1=C2, B2=C1 – далее аналогично 1).

3. A1>A2, B1>B2 $\Longrightarrow$ C1=9, C2=11, A1 и B1 – 10 и 11 в каком-то порядке (см. рис. 3).

   Тогда 3 взвешивание: A1?B1

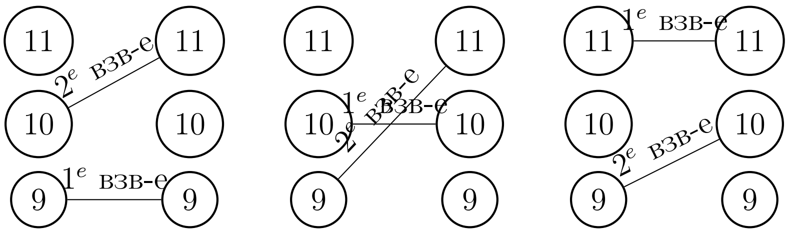


Рис. 2: Возможные варианты того, какие монеты взвешивали, для случая 2.

(a) A1>B1 $\implies$ A1=11, B1=10 $\implies$ A2=10, B2=9;

(b) A1<B1 $\implies$ A1=10, B1=11 $\implies$ A2=9, B2=10.

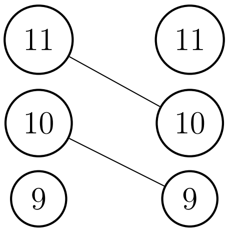


Рис. 3: Единственный возможный вариант того, какие монеты взвешивали, для случая 3.

4. A1>A2, B1<B2 (см. рис. 4).

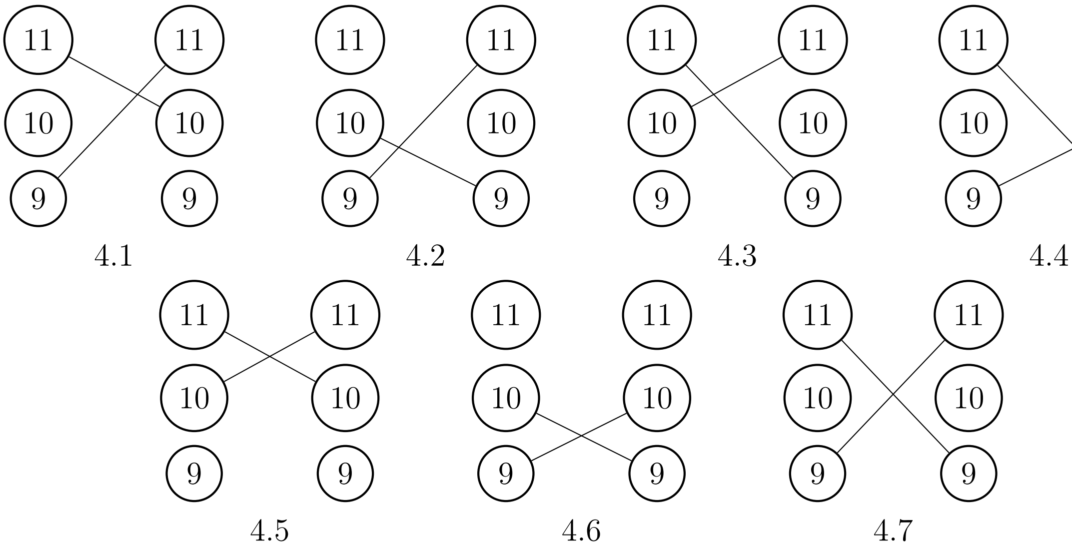


Рис. 4: Возможные варианты того, какие монеты взвешивали, для случая 4.

Тогда 3 взвешивание должно быть: A1+B1 ? C1+C2.

(a) A1+B1 > C1+C2 (соответствует рис. 4.1, 4.3 и 4.5)

4 взвешивание: C1?C2

i. C1>C2 $\implies$ рис. 4.1: A1=11, B1=9, C1=10 и A2=10, B2=11, C2=9;

ii. C1=C2 $\implies$ рис. 4.5: аналогично 4(a)i, все монеты определяются однозначно;

iii. C1<C2 $\implies$ рис. 4.3.

(b) A1+B1 = C1+C2 (соответствует рис. 4.7) – все монеты определены однозначно.

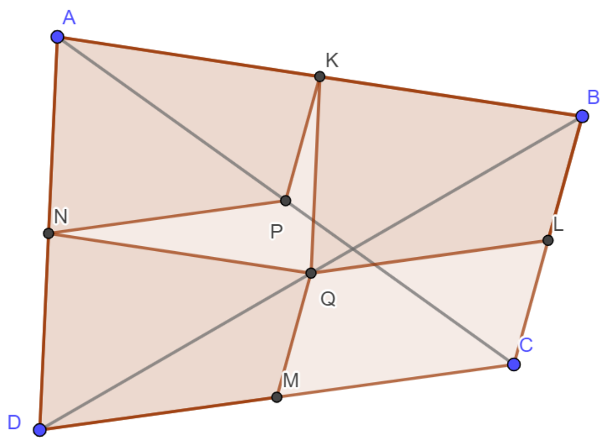
(c) A1+B1 < C1+C2 (соответствует рис. 4.2, 4.4 и 4.6) – аналогично п. 4a, 4 взвешивание: C1?C2

i. C1>C2 $\Longrightarrow$ рис. 4.2

ii. C1=C2 $\Longrightarrow$ рис. 4.6

iii. C1<C2 $\Longrightarrow$ рис. 4.4

5. (А. Юран) Верно ли, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырехугольника?



Решение: Докажем, что можно выбрать такой угол четырехугольника, что сумма его с каждым из соседних углов не превосходит развернутого угла. Действительно, сумма каких-то двух соседних углов не превосходит 180○. Пусть это углы A и D. Тогда, если $\angle A + \angle B \leq 180^\circ$, то мы получили нужное, а если $\angle A + \angle B > 180^\circ$, то $\angle C + \angle D < 180^\circ$, и нам подходят углы A, D, C. В итоге можно так назвать вершины четырехугольника A, B, C, D, что $\angle A + \angle B \leq 180^\circ$, $\angle A + \angle D \leq 180^\circ$. Пусть K, L, M, N - середины отрезков AB, BC, CD, DA, соответственно. P, Q - середины диагоналей AC и BD соответственно. Четырехугольники $AKPN$, $KBLQ$, $NQMD$ - искомые копии. Докажем, что они не перекрываются. Действительно, $\angle AKP + \angle QKB = \angle A + \angle B \leq 180^\circ$, $\angle DNQ + \angle ANP \leq 180^\circ$.

6. (Б. Френкин) По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Решение: Ответ: $2N - 1$.

Пример: обходим доску «змейкой», начиная из нижнего левого угла: вправо до конца, на 1 вверх, влево до конца, на 1 вверх, ...

Оценка: Предположим противное: $M < 2N - 1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2N - 2$, то ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь, чтобы достичь её, надо сделать минимум $N - 1$, и чтобы вернуться - тоже минимум $N - 1$, плюс ещё один ход делается собственно в нижней строке). Тогда все числа в верхней строке ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа в нижней строке ладья обошла, не заходя в верхнюю строку. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше), чем числа в нижней строке. Аналогично, все числа в левом столбце больше (или все меньше) чисел правого столбца. Не теряя общности, числа в левом столбце больше чисел правого, и числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим два числа - в левом верхнем углу (число A) и в правом нижнем (число B). С одной стороны, $A > B$ (по столбцам), с другой стороны, $A < B$ (по строкам). Противоречие.