LXXVII Московская астрономическая олимпиада (2023 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

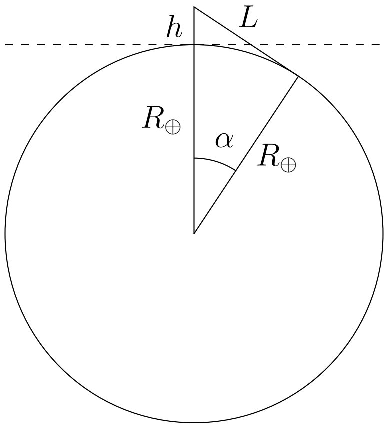
8 класс

Задача 1

Самолёт на высоте $h = 10$ км пролетает над Сингапуром (широта $\varphi \approx 0°$) в день весеннего равноденствия. Пассажиры видят восход Солнца. Определите минимальное расстояние до точки на поверхности Земли, где в этот момент видно восход Солнца. На сколько градусов долгота этой точки отличается от долготы Сингапура? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение. В день весеннего равноденствия Солнце восходит в точке востока, а значит, на меридиане Сингапура восход происходит в одно и то же местное время. Это справедливо для любого другого меридиана, однако для меридианов восточнее Сингапура восход будет происходить раньше, а западнее — позже.

Наблюдатель в самолёте находится выше, чем наблюдатель на Земле, а значит для него восход Солнца наступит раньше, так как он может заглянуть под горизонт наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Поэтому искомая точка на Земле окажется в месте касания луча зрения наблюдателя на самолёте с поверхностью Земли.



Расстояние до этой точки, которая располагается на востоке от Сингапура, найдем из теоремы Пифагора:

$$L = \sqrt{(R_\oplus + h)^2 - R_\oplus^2} = \sqrt{6390^2 - 6380^2} \approx 357\,\text{км}.$$

Итак, наблюдатель на самолёте видит поверхность Земли на расстоянии L. Поскольку в день равноденствия Солнце восходит в точке востока, то и видимое с самолёта место на земной поверхности, где также виден восход, расположено к востоку от Сингапура. Сингапур находится на экваторе, значит дуга, соединяющая его с рассматриваемой точкой — часть экватора. Расстояние L гораздо меньше длины экватора, значит, длина дуги примерно равна L. Тогда легко можем найти разницу долгот α:

$$\alpha = 360° \times \frac{L}{2\pi R_\oplus} \approx 3.2°.$$

Критерии проверки

1. Понимание причины, почему восход произойдёт в разное время **1 балл**
2. Определение направления на выделенную точку **2 балла**
3. Нахождение расстояния до горизонта **3 балла**
4. Определение разности долгот **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 2

Отправился Иван-царевич искать вещь удивительную, Чудом называемую. Баба Яга сказала ему, что, когда в первый день нового года в Столице Солнце садится, над Чудом полдень ещё. Кот Баюн утверждал, что красавицу Вегу не отыскать там на небе. Кощей же после уговоров сознался, что был в тех местах, когда долго Солнце на небо не возвращалось, а большая часть звёзд там движется так, что самое высокое положение звезды отличается от самого низкого на двадцатую часть круга. Найдите координаты места, где спрятано Чудо, если год в том царстве начинается в день осеннего равноденствия, а долгота Столицы равна 50° в.д.

Решение. В день осеннего равноденствия Солнце восходит ровно в 6 часов местного времени, а садится в 18 часов. В месте, где спрятано Чудо, полдень, т.е. 12 часов, наступает через 6 часов после того, как полдень наступил в Столице. Значит, Чудо расположено западнее на 6 часов или 90°. Искомая долгота Чуда 40° з.д.

Поскольку в месте, где спрятано Чудо, есть периоды, когда Солнце не восходит, оно должно быть за полярным кругом. Вега — звезда северного неба, следовательно Чудо спрятано за южным полярным кругом в Антарктиде.

Полный круг — это 360°, а значит, двадцатая часть круга равна 18°. Наблюдатель, находящийся на полюсе, видит звёзды, движущиеся параллельно горизонту. Если он отойдёт от полюса, то есть изменит свою широту на X°, то в верхней кульминации звезда будет подниматься на X° выше, чем при наблюдении с южного полюса, а нижняя — на X° ниже. Получается, что разность высот составит $2X^\circ$. Следовательно, Чудо находится на расстоянии 9° от южного полюса.

Того же результата можно достичь, зная формулы для верхней и нижней кульминации:

$$\begin{cases} h_{\text{в.к.}} = 90^\circ - |\varphi - \delta|, \\ h_{\text{н.к.}} = |\varphi + \delta| - 90^\circ. \end{cases}$$

Поскольку речь идёт о большей части звёзд, можно не принимать во внимание верхнюю кульминацию к югу от зенита, а также заходящие звёзды. В южном полушарии $\varphi < 0$ и, следовательно, $\delta < 0$. Тогда $|\varphi + \delta| = -(\varphi + \delta)$ и $|\varphi - \delta| = -(\varphi - \delta)$, откуда

$$h_{\text{в.к.}} - h_{\text{н.к.}} = 90^\circ + \varphi - \delta + \varphi + \delta + 90^\circ = 180 + 2\varphi = 18^\circ.$$

В итоге получаем $\varphi = -81^\circ$ или 81° ю.ш.

Критерии проверки

1. Нахождение разницы долгот Чуда и столицы	**1 балл**
2. Определение направления по долготе (запад/восток)	**2 балла**
3. Правильное численное значение долготы	**1 балл**
4. Объяснение, что широта в южном полушарии	**2 балла**
5. Правильное численное значение широты	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. А. Автаева)

Задача 3

Скопление галактик в Деве содержит 2000 галактик и занимает на небе область диаметром 8°. В центре этого скопления находится галактика M87, удалённая от Солнца на расстояние 16.5 Мпк. Определите среднее расстояние между галактиками в скоплении, если считать, что внутри скопления галактики распределены равномерно.

Решение. Пусть L — расстояние до скопления галактик, а δ — угловой радиус скопления. Тогда линейный радиус скопления равен

$$R_{\text{скоп}} = \delta L = 4^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \times 16.5 \approx 1.15\,\text{Мпк}.$$

Здесь мы учли, что угол δ в формуле должен быть в радианах. Если в скоплении $N = 2000$ галактик, то на одну галактику приходится объём:

$$V_{\text{гал}} = \frac{V_{\text{скоп}}}{N} = \frac{\frac{4\pi}{3} R_{\text{скоп}}^3}{N} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{гал}}^3.$$

Тогда радиус объёма, приходящегося на одну галактику,

$$R_{\text{гал}} = \frac{R_{\text{скоп}}}{\sqrt[3]{N}} = \frac{\delta L}{\sqrt[3]{N}} \approx 91.4\,\text{кпк}.$$

В случае равномерного распределения галактик внутри скопления расстояние между двумя соседними галактиками будет равно

$$d = 2 \cdot R_{\text{гал}} \approx 183\,\text{кпк}$$

Критерии проверки

1. Определение линейного размера скопления галактик	**2 балла**
2. Модель определения объёма, приходящегося на 1 галактику	**2 балла**
3. Получение объёмов всего скопления и одной галактики	**2 балла**
4. Численный ответ	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 4

Древние греки пользовались календарём, в котором все месяцы начинались новолунием и длились 29 или 30 дней, а средняя продолжительность календарного года была равна продолжительности тропического года. Для этого N раз за восемь лет вставляли дополнительный месяц. В то же время в Персии использовался подобный календарь, в котором вставляли M дополнительных месяцев за 19 лет. Определите M и N. За какое время в каждом из календарей накапливалась ошибка в 7 дней по сравнению с тропическим годом?

Решение. Для ответа на первый вопрос задачи достаточно приближённых вычислений. Длина тропического года, 365.242 19, примерно на 11 дней и 6 часов больше длины 12 лунных месяцев ($12 \times 29.5 = 354$ сут). За 8 лет эта разница вырастает до примерно 90 дней. Тогда $N = 90/30 = 3$. За 19 лет тропический год опережает лунный примерно на 214 суток, что составляет $M = 7$ дополнительных месяцев.

Теперь определим погрешности календарей. Из того, что месяцы должны начинаться новолунием, следует невозможность простого чередования длины месяца 29 или 30 дней. Ведь тогда средняя длина календарного месяца немного короче, чем лунного, и начало месяца рано или поздно перестанет попадать на новолуние. Единственный выход — это более сложное чередование коротких и длинных месяцев так, чтобы средняя продолжительность месяца была как можно ближе к лунному. Поэтому будем просто считать среднюю продолжительность календарного месяца равной 29.53059 суток.

Восемь тропических лет состоят из 2921.938 дней, в то время как $8 \times 12 + 3 = 99$ месяцев — из $99 \times 29.53059 = 2923.528$ суток. Отсюда получаем что за 8 лет греческий календарь опережает тропический год на 1.59 суток, откуда следует, что на 7 суток календарь «убежит» за 35.2 года.

Аналогично, 19 лет содержат 6939.6018 дня, тогда как $19 \times 12 + 7 = 235$ месяцев — 6939.6887 суток. За 19 лет разница составляет всего 0.0869 суток или чуть более 2 часов. Отсюда получаем, что 7 суток разницы набегает за $19 \times 7/0.0869 \approx 1530$ лет.

Как мы видим, персидский календарь гораздо точнее греческой «октаэтериды». Позже греки тоже пытались использовать 19-летний цикл, который в науке остался известен как метонов.

Критерии проверки

1. Определение правильных значений N и M **по 2 балла**
2. Определение времени накопления ошибки **по 2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 5

Спиральная галактика имеет диск радиуса 10 кпк. Равномерно по диску галактики разбросано множество разумных цивилизаций, где астрономы ведут наблюдения за центром галактики. В некоторый момент на сверхмассивную дыру в центре этой галактики падает звезда, что приводит к яркой вспышке излучения. Через какое время об этом событии узнает половина цивилизаций в этой галактике? Ответ дайте в годах.

Одновременно со вспышкой перпендикулярно диску галактики со скоростью 15 000 км/с вылетел сгусток вещества звезды. Какая доля цивилизаций будет видеть этот сгусток на угловом расстоянии большем 5° к моменту, когда все цивилизации узнают о вспышке?

Решение. Поскольку цивилизации разбросаны по диску галактики равномерно, то число цивилизаций в некотором объёме диска пропорционально площади этой части диска. Пусть R — радиус диска. Тогда полная площадь диска равна $S = \pi R^2$, а радиус диска, соответствующий половине площади диска галактики, равен

$$R_{1/2} = R/\sqrt{2} \approx 7.1 \text{ кпк} \approx 23000 \text{ св. лет.}$$

Получаем, что за 23000 лет свет от вспышки доберётся до половины цивилизаций.

Рассмотрим некоторую цивилизацию, обитающую на расстоянии R_5 от центра галактики, которая видит сгусток на угловом расстоянии $\alpha = 5^\circ$ над центром галактики в тот момент, когда информация об этом достигла края галактического диска. Произошло это событие спустя время $t = R/c$, где c — скорость света. Но рассматриваемая цивилизация сама узнала об этом событии только через время $t_5 = R_5/c$. Значит, она наблюдает движение сгустка в течение времени $\Delta t = t - t_5$. За это время сгусток поднялся над галактикой на высоту $H = v\Delta t$. Поскольку угол α довольно мал, можем записать связь α и H, как

$$\alpha = \frac{H}{R_5} = \frac{v\Delta t}{R_5} = \frac{R - R_5}{R_5}\frac{v}{c}.$$

Отсюда получаем выражение для R_5:

$$R_5 = R\frac{1}{\frac{\alpha}{v/c} + 1} \approx 3.6 \text{ кпк.}$$

Тогда искомая доля цивилизаций равна

$$\eta = \left(\frac{R_5}{R}\right)^2 \approx 0.13.$$

Критерии проверки

1. Число цивилизаций пропорционально части площади диска **1 балл**
2. Вычисление $R_{1/2}$ **1 балл**
3. Вычисление времени – ответ на 1-й вопрос **1 балл**
4. Показано, что в точке с $\alpha = 5^\circ$ видно сгусток только в течение Δt **1 балл**
5. Вычисление R_5 **3 балла**

   За вычисление R_5 без учёта скорости света с ответом 5.7 кпк выставляется 1 балл.
6. Вычисление искомой доли **1 балл**

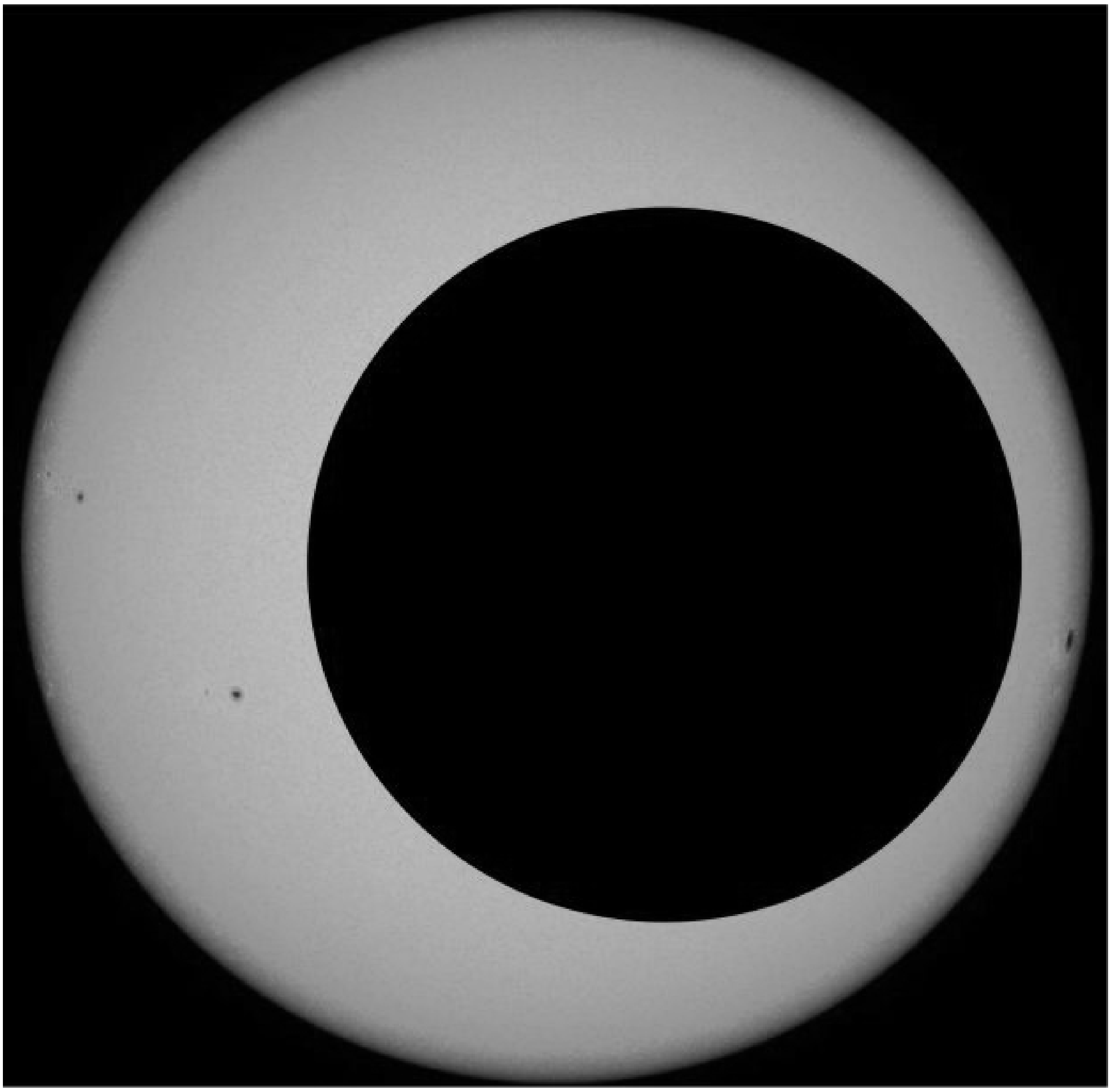
   Этот балл выставляется только в тех случаях, когда за определение R_5 была поставлена оценка выше 0.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

На рисунке показано затмение Солнца, которое когда-нибудь смогут наблюдать наши далёкие-далёкие потомки. Через сколько лет это произойдёт, если Луна удаляется от Земли с постоянной скоростью 3 см/год, а радиус Солнца растёт на $1.2\% R_\odot$ каждые 100 млн.лет? Как долго будет длиться затмение (все фазы в сумме)? Как часто будут происходить затмения? Считайте, что орбита Луны со временем станет круговой и лежащей в плоскости эклиптики.



Решение. С помощью линейки определим относительные видимые размеры Луны и Солнца на рисунке. Получим, что диск Солнца в 1.5 раза больше диска Луны. Можно вспомнить, что угловой размер Солнца равен примерно $\delta_\odot \approx 32'$ или вычислить его из имеющихся данных:

$$\delta_\odot \approx \frac{2R_\odot}{a_\oplus} \approx 9.4 \times 10^{-3}\,\text{рад} \approx 32'.$$

Угловой размер Солнца растет со временем, как

$$\delta_\odot(t_5) = \frac{2(R_\odot + 0.012R_\odot t_5)}{a_\oplus} = \delta_\odot(1 + 0.012t_5).$$

Здесь как t_5 мы обозначаем время, измеряемое в сотнях миллионов лет. Угловой размер Луны уменьшается со временем, как

$$\delta_{☾}(t_5) = \frac{2R_{☾}}{a_{☾} + vt_5} = \frac{\delta_{☾}}{1 + \frac{vt_5}{a_{☾}}}.$$

Текущий угловой размер Луны получается равным $\delta_{☾} = 31'$. Для того чтобы не возникало проблем с размерностью, скорость удаления Луны нужно выразить в особых единицах: $v = 3\,\text{см/год} = 3000\,\text{км}/10^8$ лет. Чтобы узнать время, через которое угловые размеры Солнца и Луны будут отличаться в полтора раза, поделим их выражения одно на другое:

$$\frac{\delta_{\odot}(t_5)}{\delta_{☾}(t_5)} = 1.5 = \frac{\delta_{\odot}}{\delta_{☾}}(1 + 0.012t_5)\left(1 + \frac{vt_5}{a_{☾}}\right).$$

Это уравнение можно привести к квадратному, решив которое, получим $t_5 \approx 21$, то есть 2.1 млрд лет.

Расстояние до Луны в этот момент будет равно $\bar{a}_{☾} = a_{☾} + vt_5 = 4.5 \times 10^5\,\text{км}$. Если Луна будет двигаться по эклиптике, то время между затмениями будет равно периоду обращения Луны относительно Солнца (синодический период). Орбитальный (сидерический) период Луны можно найти из третьего закона Кеплера:

$$T = T_0 \left(\frac{\bar{a}_{☾}}{a_{☾}}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 34\,\text{сут}.$$

Само Солнце совершает один оборот по небу за год. Тогда синодический период Луны равен

$$S = \frac{365.25 \times 34}{365.25 - 34} = 38\,\text{сут}.$$

От начала до конца затмения Луна проходит угловое расстояние, равное $\delta_{\odot}(t_5) + \delta_{☾}(t_5)$, относительно Солнца. Тогда продолжительность затмения равна

$$\tau = 38 \times \frac{40' + 27'}{360^\circ} \approx 0.118\,\text{сут} \approx 2.8\,\text{часа}.$$

Критерии проверки

1. Полученное из рисунка отношение угловых размеров Солнца и Луны в диапазоне 1.45-1.55 **2 балла**

Если значение получилось хуже, но попадает в интервал 1.4-1.6, то выставляется 1 балл, в противном случае — 0 баллов за этап.

2. Верное вычисление времени, через которое сможет наблюдаться затмение, изображённое на рисунке **4 балла**

Из них 1 балл ставится за вычисление углового размера Солнца с величиной 31-32′ (или использование известного углового размера из диапазона 30-32′). При использованиии $\delta_{\odot} = \delta_{☾} = 0.5^\circ$ оценка не снижается.

Если эта величина вычисляется из заведомо неправильной модели или вообще берётся «с потолка», то ответы на оставшиеся два вопроса оцениваются по 1 баллу.

3. Верное вычисление расстояние до Луны в будущем **1 балл**
4. Верное вычисление орбитального периода вращения Луны **2 балла**
5. Верное вычисление синодического периода вращения Луны **1 балла**
6. Верное вычисление длительности всего затмения **2 балла**

Если вместо диаметров использованы радиусы тел, то ставится 1 балл.

Если вместо синодического периода использован сидерический, то ставится 1 балл.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(А. М. Татарников, Е. Н. Фадеев)