11 класс

4 марта 2023 года

Решение задач

Количество задач – 4

Сумма баллов – 150

Решение задач заключительного этапа Московской олимпиады школьников – 2023 по экономике

Задача 1. Экологические проблемы.(40 баллов)

1) (8 баллов) Pr шахты = $Pб*Qб + Pк*Qк – 2* Qк = (6- Qб)*Qб + (12- Qк)*Qк – 2* Qк =$
$= 6* Qб – Qб^2 + 10* Qк – Qк^2 \to max$ => ЭПВВн => $Qб = 3$ $Qк = 9$ $Pk = 11$ $Pб = 3$ (+**2 балла за каждый выпуск и цену**)

Проверка $Qк = 9 > 2*Qб = 2*3 = 6$ выполнена

2) (12 баллов) SW (складировать излишки бурого) = $CSб + CSк + Pr$-ущербб = $Qб^2/2 + Qк^2/2 + (20 – Qк)* Qк + (6- Qб)*Qб– 2* Qк -12* Qк - 2*Qк \to max$ => ЭПВВн => $Qб = 4$ $Qк = 6$

За каждый правильно выраженный излишек потребителей **+2 балла**.

Верно выписано благосостояние **+3 балла**.

Обоснование поиска максимума с ограничениями **+4 балла**.

Проверка $Qк = 6 > 2*Qб = 2*4 =8$ не выполнена.

SW (складировать излишки каменного) = $-Qб^2/2 - Qк^2/2 + 8*Qк + 2*Qб \to max$ => ЭПВВн => $Qб = 2$ $Qк = 8$. Проверка $Qк = 8 < 2*Qб = 2*2 =4$ не выполнена.

SW (без излишков) = $-Qб^2/2 - Qк^2/2 + 8*Qк + 2*Qб = 16*Qб – 2,5*Qб^2 \to max$ => ЭПВВн => $Qб = 3,2$ $Qк = 6,4$ (**+1 балл за каждый выпуск**)

3) (10 баллов) $tк = 12$ $tб = 2$ (из условия)

$Pr = 6* Qб – Qб^2 + 10* Qк – Qк^2 -2* Qб - 12* Qк$ (*выписана верно целевая задача* **+2 балла)** $\to max$ => ЭПВВн (*обоснование поиска максимума с ограничениями* **+2 балла)** =>

$Qб = 2$ $Qк = 3$. Проверка $Qк = 3 > 2*Qб = 2*2 =4$ не выполнена.

Pr (без излишков угля) = $4*Qб – Qб^2 + 6* Qк – Qк^2 = 16*Qб – 5*Qб^2$

$Qб = 1,6$ $Qк = 3,2$ (**+1 балл за каждый выпуск**) => выпуски отличаются от общественно оптимальных, потому что хотя введение налога устранило отрицательный внешний эффект, монополия будет производить меньше в силу *возможности назначать цены на рынке* (за объяснение отклонения выпусков от общественно оптимального **+4 балла**).

Если указано, что оптимум не достигнут из-за внешнего эффекта, то 0 баллов за объяснение. Если указано, что монополия не учитывает благосостояние потребителей (или оно упало), то 0 баллов за объяснение.

4) (9 баллов) Поскольку в предыдущем пункте проблема возникала из-за монопольной власти шахты, то можно ввести дополнительно к налогам ещё и потолки цен.

$Qб = 3,2$ $Qк = 6,4$ – общественно оптимальные => $Pк = 20 – 6,4 = 13,6$ $Pб = 6 – 3,2 = 2,8$

За формулировку того, как следует регулировать **+5 баллов**. За каждый правильно приведенное числовое значение потолков цен **+2 балла**.

Если в п.) 2 неверно найдены оптимальные выпуски, но эти неверные выпуски подставлены в функции спроса в п.4) для нахождения потолков, то ставится полный балл за значения потолков.

В ответе выше приведены значения потолков с налогами, если приведены значения потолков без налогов, то ставится 4 балла за значения потолков.

Если написано, что невозможно такое регулирование, а значение потолков посчитано верно, ставится ***0 баллов*** *за п.4).*

Задача 2. Цены растут. (35 баллов)

1) Всего 8 баллов.

ИПЦ (корзины без ноутбука) = 1,2

ИПЦ (с ноутбуком) = $\frac{\text{стоимость старой корзины в новых ценах+новая средняя цена ноутбука}}{\text{стоимость старой корзины в старых ценах+старая средняя цена ноутбука}}$ **(+2 балла)**

Балл ставится строго за такую формулу ИПЦ ноутбуком. За стандартную формулу ИПЦ балл НЕ ставится.

Пусть Х - старая средняя цена ноутбука, У - стоимость старой корзины в старых ценах

Средняя цена ноутбука рассчитана как среднее арифметическое из данных в Таблице 1:

Старая цена ноутбука = 800 **(+1 балл)** Новая цена ноутбука = 880 **(+1 балл)**

Если ученик привёл расчёт суммарных расходов на ноутбуки в старом (8000) и новом году (8800), то за это ставится балл как за расчёт средних цен.

По условию $Х/(Х + У) = 0{,}2$ **(+2 балла)** => $У/(Х + У) = 0{,}8$

+2 балла ставится за то, что ученик приводит это соотношение и не использует долю в 10% из условия задачи. Информация про долю расходов на ноутбуки в новом году в размере 10% из условия не требовалась для решения ни одного из пунктов.

ИПЦ (корзины с ноутбуком) = $\frac{1{,}2*У+1{,}1*Х}{У+Х} = \frac{0{,}1*У}{У+Х} + 1{,}1 = 1{,}18$ **(+1 балл)**

Ответ: ИПЦ меньше на 2 процентных пункта **(+1 балл сугубо за знак изменения)**

2) Всего 10 баллов.

Линейная зависимость: цена ноутбука = $\sum_1^5 a_{it} * z_{it} + a_{0t}$, где

z_i – значение характеристики ноутбука в период t;

a_i – цена характеристики ноутбука в период t.

Например, цена 6-го ноутбука в более ранний год:

$750 = a_{11}*60 + a_{21}*65 + a_{31}*60 + a_{41}*1 + a_{51}*0 + a_{01}$

Цена 6-го ноутбука в более поздний год:

$824 = a_{12}*85 + a_{22}*80 + a_{32}*85 + a_{42}*1 + a_{52}*1 + a_{02}$

За выписывание хотя бы двух верных уравнений для разных ноутбуков **+ 4 балла**.

Если забыт свободный член a_{0t}, то штраф **– 1 балл.** *Если впоследствии ученик подставил хотя бы в одно дополнительное уравнение (которое не использовалось для нахождения коэффициентов) и проверил, что для него система выполнена, то штраф за отсутствие свободного члена НЕ ставится.*

Если система уравнений приведена без различий коэффициентов по годам, то штраф **– 2 балла**. *Если по приведенным расчётам видно, что ученик использовал для расчётов коэффициентов только данные по характеристикам только из одного года, то этот штраф НЕ применяется.*

Решение коэффициентов для двух систем линейных уравнений даёт цены характеристик в таблице ниже.

Год	Частота процессора	Ёмкость диска	Диагональ экрана	Встроенный микрофон	Встроенная камера	Свободный член
Ранний	6	4	2	10	20	0
Поздний	4,8	3,2	1,6	8	16	0

За правильно посчитанный свободный член баллов не ставится.

За каждую правильно посчитанную цену характеристики ставится по **+0,5 балла**.

Сделан вывод, что исследователь прав касательно линейной связи **+1 балл**.

3) Всего 11 баллов.

Сформулирован тезис, что следует посчитать среднюю цену ноутбука в старой комплектации, но в новых ценах характеристик +**5 баллов.**

Комментарий: если вместо тезиса строкой выше предложено посчитать среднюю цену ноутбука в новой комплектации в старых ценах только **+ 3 балла**.

Расчёт средней цены старого ноутбука в новых ценах характеристик. Поскольку из таблицы выше можно видеть, что цена каждой характеристики упала в 1,25 раза, а цена ноутбука в более ранний год линейно зависит от значений характеристик, то получается, что средняя цена ноутбука в старой комплектации упала в 1,25 раза. **(+ 4 балла)**

ИПЦ (корзины с ноутбуком) = $\frac{1{,}2*У+0{,}8*Х}{У+Х} = = \frac{0{,}4*У}{У+Х} + 0{,}8 = 1{,}12$ **(+1 балл)**

Ответ: ИПЦ меньше ещё на 5 процентных пунктов **(+1 балл за знак изменения)**

Комментарий: если сформулирован тезис, что из-за роста объёма характеристик стоимость сопоставимого ноутбука будет меньше без самого расчёта ИПЦ, то +**1 балл за знак изменения.** *Если же указано, что упадёт, но без, то ставится* **даже за верный знак изменения 0 баллов**.

4) Всего 6 баллов

Проблемы: (1) изменение качества благ в корзине (2) изменение весов во времени из-за эффекта замещения (=переключения в силу изменения цен)**;** (3) появление/исчезновение благ из корзины **(+3 б. за любые две).**

Если указано, что изменились во времени веса благ без пояснения причин такого изменения, то **+2 балла**. Если же это утверждение в паре с утверждением (2) или (3), то отдельно не оценивается, поскольку повторяет их.

Если указано, что изменились предпочтения, имел место научно-технический прогресс, имеет место проблема наблюдения цен в теневой экономике и при натуральном хозяйстве, то **0 баллов.** Эти утверждения сами по себе являются слишком общими, если же они сопровождались примерами/пояснениями, близкими по смыслу (1), (2) или (3), то оценивались на **полный балл**.

Если указано, что ИПЦ не учитывает неравенство в распределении удара от изменения цен ИЛИ рост дохода, то **0 баллов,** потому что в условии было сформулировано, что «возникают проблемы с оценкой изменения благосостояния домохозяйств в результате ежегодного роста цен».

Задача 3. Такси, такси (35 баллов)
Пункт 1 (8 баллов)

1. Так как решения принимаются последовательно для начала запишем задачу оптимизации таксистов:

$$\pi_T = (28 - Q - r - 6)Q \to \max_{Q \geq 0} \Rightarrow Q^* = \frac{22 - r}{2}$$

2. Далее запишем задачу оптимизации агрегатора:

$$\pi_A = 100 \cdot \frac{22 - r}{2} \cdot (r - 2) \to \max_{r \geq 0} \Rightarrow r^* = 12$$

3. Найденное значение r подставим и найдём ответ $P = 23$ и $\pi_A = 5000$

Пункт 2 (17 баллов)

1. Без инвестиций в сокращение издержек, зная из прошлого пункта, что $Q^* = \dfrac{22 - r}{2}$, прибыль таксиста составит:

$$\pi_T = \left(\frac{22 - r}{2}\right)^2$$

2. Если таксист инвестирует в сокращение издержек, то его прибыль составит:

$$\pi_T = (28 - Q - r - 4)Q - 12 \to \max_{Q \geq 0} \Rightarrow Q^* = \frac{24 - r}{2} \Rightarrow \pi_T = \left(\frac{24 - r}{2}\right)^2 - 12$$

3. Тогда таксисты инвестируют, если:

$$\left(\frac{24 - r}{2}\right)^2 - 12 \geq \left(\frac{22 - r}{2}\right)^2 \Rightarrow r \leq 11$$

4. Получаем, что если агрегатор оставит $r = 12$, то таксисты не будут инвестировать и его прибыль составит 5000. Если же агрегатор стимулирует таксистов инвестировать, то его задача оптимизации имеет вид:

$$\pi_A = 100 \cdot \frac{24 - r}{2} \cdot (r - 2) \to \max_{11 \geq r \geq 0}$$

5. Вершина параболы с ветвями вниз достигается при $r = 13$, но ограничения $11 \geq r \geq 0$. Значит, оптимум в $r^* = 11$. При такое r прибыль агрегатора (5850) больше прибыли при $r = 12$.

6. Найденное значение r подставим и найдём ответ $P = 21.5$ и $\pi_A = 5850$

Пункт 3 (10 баллов)

1. $P = r + 6$, так как при данной r агрегатор будет назначать минимальную возможную цену, чтобы увеличить выпуск при данном r и значит увеличить прибыль.

2. Далее запишем задачу оптимизации агрегатора:

$$\pi_A = 100 \cdot Q(r+6) \cdot (r-2) = 100(28-(6+r))(r-2) \to \max_{r \geq 0} \Rightarrow r^* = 12, P = 18$$

3. Цена на конечную услугу сокращается, так как при наличии диктата по итоговым ценам со стороны агрегатора не происходит проблемы двойной маргинализации, то есть у таксистов пропадает рыночная власть к назначению дополнительной наценки на услугу. То есть не происходит "двойной наценки"и значит цена сокращается.

Критерии:
Пункт 1:

1. Шаг 1: *+1 балл* за запись прибыли (неважно от (Q или от P)), *+2 балла* за нахождение верного оптимального Q (или P)

2. Шаг 2: *+1 балл* за запись прибыли от r, *+2 балла* за нахождение верного оптимального r

3. Шаг 3: *+2 балла* за верный ответ (за верно найденную цену и прибыль по 1 баллу)

Пункт 2:

1. Шаг 1: Самостоятельно не оценивается.

2. Шаг 2: *+1 балл* за запись прибыли от r, *+2 балла* за нахождение верного оптимального Q в зависимости от r

3. Шаг 3: *+3 балла* за идею сравнения прибылей от r, *+3 балла* за нахождение верного ограничения на r

4. Шаг 4-5: *+1 балл* за запись прибыли от r с учетом ограничений, *+1 балл* за нахождение кандидата в оптимумы $r^* = 13$, *+4 балла* за нахождение верного оптимального r.

5. Шаг 6: *+2 балла* за верный ответ (за верно найденную цену и прибыль по 1 баллу)

Пункт 3:

1. Шаг 1: *+2 балл* за утверждение $P = r + 6$, *+2 балла* за обоснования

2. Шаг 2: *+1 балл* за запись прибыли от r, *+2 балла* за нахождение верного оптимального r, *+1 балл* за верной найденное P

3. Шаг 3: *+2 балл* за полностью верное обоснование.

Штрафы:

1. Ответы без обоснования оцениваются в 0 баллов.

2. Отсутствие проверки условия второго порядка в -1 балл за каждое пропущенное условие.

3. За каждую арифметическую ошибку начисляется штраф в 2 балла.

4. При наличие арифметической ошибки, если ошибка не изменила идеи и сложности решения задачи - не начисляются баллы лишь за ошибку в первый раз, а далее работа проверяется с учётом ошибки. Иначе все дальнейшие рассуждения оцениваются в 0 баллов.

5. За любое решение пункта 1 и 2, не учитывающее стратегическое взаимодействие считается идейно неверным и оценивается в 0 баллов.

6. Любое решение пункта 3, в котором последователь максимизирует прибыль без *директивно назначенной цены*, т.е. те случаи, когда в записи прибыли последователя не фигурирует P считается идейно неверным и оценивается в 0 баллов.

Задача 4. Из обезьяны (40 баллов)

Пункт 1 (14 баллов)

1. Старательный школьник получает полезность $U_A = 2(A-1)+B$, если бы он стал ленивым, то его полезность имела бы вид $U_{A\to B} = -(A-1)+2B+81$.

2. Ленивый школьник получает полезность $U_B = -A+2(B-1)+101$, если бы он стал старательным, то его полезность имела бы вид $U_{B\to A} = 2A+(B-1)$.

3. Тогда по условию $A = X$, а класс будет равновесным при $A > 0$ и $B > 0$, если:

$$\begin{cases} U_A \geq U_{A\to B} \\ U_B \geq U_{B\to A} \\ A+B=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(X-1)+(200-X) \geq -(X-1)+2(200-X)+81 \\ -X+2(200-X-1)+101 \geq 2X+(200-X-1) \end{cases}$$

4. Имеем решение системы: $71 \leq X \leq 75$

5. Отдельно заметим, что если все школьники ленивые или все школьники списывающие, то класс тоже является равновесным. Для этого достаточно сравнить соответствующие полезности.

   Итого ответ: $X \in [71; 75] \cup \{0, 200\}$ (за правильный ответ принимается и ответ в предположении что школьники только целые и в предположении что школьники только целочисленные)

Пункт 2 (12 баллов)

1. Чтобы все старательные школьники остались старательными необходимо, чтобы $U_A \geq U_{A\to B}$. Чтобы все ленивые школьники решили стать старательными $U_B < U_{B\to A}$ (обратите внимание что знак строгий из условия)

2. Пусть в первой лиге и второй лиге по X_1 и X_2 старательных школьников, тогда условия в терминах X_1 и X_2 имеют вид:

$$\begin{cases} 2(X_1-1)+(120-X_1) \geq -(X_1-1)+2(120-X_1)+81 \ \textbf{(1)} \\ -X_1+2(120-X_1-1)+101 < 2X_1+(120-X_1-1) \ \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(X_2-1)+(80-X_2) \geq -(X_2-1)+2(80-X_2)+81 \ \textbf{(3)} \\ -X_2+2(80-X_2-1)+101 < 2X_2+(80-X_2-1) \ \textbf{(4)} \end{cases}$$

3. Имеем: $X_1 > 55$ и $X_2 > 45$

4. Если в работе предполагались бесконечно делимые школьники, то далее верный ответ: $X = X_1+X_2 > 100$. Если же предполагались целочисленные школьники, то минимальной количество школьников в каждой лиге это $X_1 = 56$ и $X_2 = 46$, то есть минимальное количество старательных школьников 102.

Пункт 3 (9 баллов)

1. Если в первой лиге старательных школьников меньше либо равно 50, то так как из (1) $X_1 \geq 51$ и из (2) $X_1 > 55$, то в этом случае все участники перовой лиге решат стать ленивыми и максимальное количество старательных школьников будет не более 80. Если же в первой лиге больше 50 старательных школьников, то во второй лиге старательных школьников не более 40, но так как из (3) $X_2 \geq 42$ и из (4) $X_2 > 45$, все школьники второй лиге решат стать ленивыми и максимальное количество старательных школьников будет не более 120.

2. Если все старательные школьники будут участниками первой лиге, но максимизируемо число школьников как раз составит 120.

Пункт 4 (5 балла)

1. Из 3 пункта нам нужно хотя бы 2 года, так как за год невозможно сделать всех старательными.

2. Из пункта 3 за первый год мы можем сделать 120 старательных школьников к концу первого года, а из пункта 2 имея 120 старательных школьников мы за год можем сделать всех старательными. Тогда сделать всех старательными за 2 года возможно.

Критерии:
Пункт 1:

1. Шаг 1: +*1 балл* верную формулировку полезностей в двух случаях

2. Шаг 2: +*1 балл* верную формулировку полезностей в двух случаях

3. Шаг 3: +*4 балла* за верную систему от X или эквивалентную.

4. Шаг 4: +*4 балла* за верное решение системы.

5. Шаг 5: +*2 балла* за указание того что 0 и 200 тоже подходит, +*2 балла* за обоснование.

Пункт 2:

1. Шаг 1-2: +*6 балла* за верные системы на X_1 и X_2.

2. Шаг 3: +*2 балла* за верное решение системы.

3. Шаг 4: +*4 балла* за верное обоснование итогового ответа, из низ 1 балл за ответ.

Пункт 3:

1. Шаг 1: +*6 баллов* за верную оценку максимального количества школьников.

2. Шаг 2: +*3 балла* за верный пример как получить 120 старательных школьников.

Пункт 4:

1. Шаг 1: +*3 баллов* за верную оценку количества лет.

2. Шаг 2: +*2 балла* за верный пример как получить 200 старательных школьников.

Штрафы:

1. Ответы без обоснования оцениваются в 0 баллов.

2. При наличие арифметической ошибки, если ошибка не изменила идеи и сложности решения задачи - не начисляются баллы лишь за ошибку в первый раз, а далее работа проверяется с учётом ошибки. Иначе все дальнейшие рассуждения оцениваются в 0 баллов.

3. Если в решении пунктов 1-3 участник игнорирует условие о том что школьник не учитывает себя же в своей полезности, то участник теряет 10 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.

4. Если в решении пунктов 1-3 участник игнорирует условие о том что количество школьников каждого типа не меняятся, если сам школьник меняет свой тип, то участник теряет 5 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.

5. Если в решении пунктов 1-3 участник сравнивает полезность ленивых и старательных, вместо того чтобы сравнивать индивидуальные полезности, то участник теряет 10 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.

6. Если в решение пунктов 2 и 3 допущена ошибка из-за отсутствие строгих знаков, то есть игнорируется условие о том что полезность должна быть строго больше чтобы школьник сменил свой тип, участник теряет 5 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.

7. Если при решении пункта 2 участник не проверяет условие на то что старательный должны остаться старательными и не доказывает почему в его решении оно не обходимо, начисляется штраф в 5 баллов.