



9 класс

4 марта 2023 года

Решение задач

Количество задач – 4

Сумма баллов – 150

**Решение задач заключительного этапа
Московской олимпиады школьников – 2023
по экономике**

Задача 1. Веганы и мясоеды (40 баллов)

Веганы и мясоеды

1) (10 баллов) $Q=P=60$; $W=60*120/2-0,2Q*(60+N)=3600-0,2*60*(60+N)=3600-720-12N=2880-12N$

5 баллов за расчёт равновесия, ещё 5 – за благосостояние

2) (5 баллов) Запрет будет введён, если веганов больше, чем мясоедов, т.е. при $N>60$

3) (10 баллов) Нетрудно понять, что при $Q=0$ общественное благосостояние вообще никак не зависит от рынка коров, т.е. $W=0$.

Значит, мы ищем N :

$$2880-12N<0$$

$$12N>2880$$

$$N>240$$

В то же время запрет будет введён при $N>60$

Значит, голосование будет эффективным при $N<60$ (когда меру не надо вводить и её не введут) и при $N>240$ (когда меру надо вводить и её введут). (Не)включение точек 60 и 240 не оценивается, поскольку в задаче не описан механизм разрешения ничьих

5 баллов за нахождение условия оптимальности запрета, ещё 5 за правильный ответ. Если участник пишет, что голосование эффективно только при $N>240$, т.е. игнорирует второй участок, это 10 баллов за пункт

4) (15 баллов) Считаем просто и прямолинейно:

$$120-P=P-t; P=60+0,5t; Q=60-0,5t; DWL=(\text{изменение } Q)*t=0,5t^2$$

$$\text{Тогда } CS+PS - \text{ущерб}=3600-0,25t^2; W=3600-0,25t^2-0,2*(60-0,5t)*(60+N) = \\ = 3600-0,25t^2-0,2*(3600-30t+60N-0,5tN) = 3600-0,25t^2-720+6t-12N+0,1tN$$

Парабола ветвями вниз относительно t :

$$t^*=12+0,2N$$

5 баллов за нахождение параметров равновесия, выраженных через t , ещё 5 за корректное выражение общественного благосостояния (по 1 за CS, PS и DWL , 2 за внешний эффект), и 5 за оптимизацию и нахождение ответа.

Задача 2. Ипотечный блиц (35 баллов)

Ипотечный блиц.

0) Выведена или использована формула аннуитета ниже (+6 баллов).

$$S = \frac{X}{(1+i)} + \frac{X}{(1+i)^2} + \dots + \frac{X}{(1+i)^T} = \frac{X * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i}$$

1) $2 * S = \frac{2 * X * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i}$ (+4 балла за запись)

Удвоение суммы кредита *удвоит* и размер платежа вдвое при тех же величинах ставки по кредиту и срока кредита. (+2 балла за вывод).

$$2) S = \frac{X_{\text{нов}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^{2T}})}{i} \quad S = \frac{X_{\text{стар}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i} \quad (+4 балла за запись)$$

$$\frac{X_{\text{нов}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^{2T}})}{i} = \frac{X_{\text{стар}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i}$$

$$\frac{X_{\text{нов}}}{X_{\text{стар}}} = \frac{(1 - \frac{1}{(1+i)^{2T}})}{(1 - \frac{1}{(1+i)^T})} = \frac{(1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{(1 - \frac{1}{(1+i)^T}) * (1 + \frac{1}{(1+i)^T})}$$

$$\frac{X_{\text{нов}}}{X_{\text{стар}}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{(1+i)^T})}$$

$$0 < \frac{1}{(1+i)^T} < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{(1+i)^T} < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{(1 + \frac{1}{(1+i)^T})} > 0,5$$

(+6 баллов за ход решения)

Упадёт, но меньше, чем вдвое (+2 балла за вывод)

$$3) S = \frac{X_{\text{нов}} * (1 - \frac{1}{(1+2*i)^T})}{2*i} \quad S = \frac{X_{\text{стар}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i} \quad (+4 балла за запись)$$

$$\frac{X_{\text{нов}} * (1 - \frac{1}{(1+2*i)^T})}{2*i} = \frac{X_{\text{стар}} * (1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{i}$$

$$\frac{X_{\text{нов}}}{X_{\text{стар}}} = 2 * \frac{(1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{(1 - \frac{1}{(1+2*i)^T})}$$

$$\frac{1}{1+2*i} < \frac{1}{1+i} \Rightarrow \frac{1}{(1+2*i)^T} < \frac{1}{(1+i)^T} \Rightarrow -\frac{1}{(1+2*i)^T} > -\frac{1}{(1+i)^T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+2*i)^T} > 1 - \frac{1}{(1+i)^T} \Rightarrow \frac{(1 - \frac{1}{(1+i)^T})}{(1 - \frac{1}{(1+2*i)^T})} < 1 \quad (+5 баллов за ход решения)$$

Вырастет меньше, чем вдвое (+2 балла за вывод)

Комментарий. За ошибку в степенях со сдвигом в 1 период баллы НЕ снимаются.

За продвижение по пунктам 0), 2) и 3) от записи задачи до её решения ставится неполный балл за ход решения. В пунктах 2) и 3) не более 3 баллов, в пункте 0) с шагом в 2 балла.

За получение верного ответа, но из неправильных условий, ставится 0 баллов за пункт.

За неправильное начисление сложных процентов за всё задание ставится 0 баллов. Такие решения при проверке помечаются как «грубая ошибка».

Задача 3. Такси, такси (35 баллов)

Пункт 1 (8 баллов)

1. Так как решения принимаются последовательно для начала запишем задачу оптимизации таксистов:

$$\pi_T = (28 - Q - r - 6)Q \rightarrow \max_{Q \geq 0} \Rightarrow Q^* = \frac{22 - r}{2}$$

2. Далее запишем задачу оптимизации агрегатора:

$$\pi_A = 100 \cdot \frac{22 - r}{2} \cdot (r - 2) \rightarrow \max_{r \geq 0} \Rightarrow r^* = 12$$

3. Найденное значение r подставим и найдём ответ $P = 23$ и $\pi_A = 5000$

Пункт 2 (17 баллов)

1. Без инвестиций в сокращение издержек, зная из прошлого пункта, что $Q^* = \frac{22 - r}{2}$, прибыль таксиста составит:

$$\pi_T = \left(\frac{22 - r}{2}\right)^2$$

2. Если таксист инвестирует в сокращение издержек, то его прибыль составит:

$$\pi_T = (28 - Q - r - 4)Q - 12 \rightarrow \max_{Q \geq 0} \Rightarrow Q^* = \frac{24 - r}{2} \Rightarrow \pi_T = \left(\frac{24 - r}{2}\right)^2 - 12$$

3. Тогда таксисты инвестируют, если:

$$\left(\frac{24 - r}{2}\right)^2 - 12 \geq \left(\frac{22 - r}{2}\right)^2 \Rightarrow r \leq 11$$

4. Получаем, что если агрегатор оставит $r = 12$, то таксисты не будут инвестировать и его прибыль составит 5000. Если же агрегатор стимулирует таксистов инвестировать, то его задача оптимизации имеет вид:

$$\pi_A = 100 \cdot \frac{24 - r}{2} \cdot (r - 2) \rightarrow \max_{11 \geq r \geq 0}$$

5. Вершина параболы с ветвями вниз достигается при $r = 13$, но ограничения $11 \geq r \geq 0$. Значит, оптимум в $r^* = 11$. При таком r прибыль агрегатора (5850) больше прибыли при $r = 12$.

6. Найденное значение r подставим и найдём ответ $P = 21.5$ и $\pi_A = 5850$

Пункт 3 (10 баллов)

1. $P = r + 6$, так как при данной r агрегатор будет назначать минимальную возможную цену, чтобы увеличить выпуск при данном r и значит увеличить прибыль.

2. Далее запишем задачу оптимизации агрегатора:

$$\pi_A = 100 \cdot Q(r + 6) \cdot (r - 2) = 100(28 - (6 + r))(r - 2) \rightarrow \max_{r \geq 0} \Rightarrow r^* = 12, P = 18$$

3. Цена на конечную услугу сокращается, так как при наличии диктата по итоговым ценам со стороны агрегатора не происходит проблемы двойной маргинализации, то есть у таксистов пропадает рыночная власть к назначению дополнительной наценки на услугу. То есть не происходит "двойной наценки" и значит цена сокращается.

Критерии:

Пункт 1:

1. Шаг 1: +1 балл за запись прибыли (неважно от (Q или от P)), +2 балла за нахождение верного оптимального Q (или P)
2. Шаг 2: +1 балл за запись прибыли от r, +2 балла за нахождение верного оптимального r
3. Шаг 3: +2 балла за верный ответ (за верно найденную цену и прибыль по 1 баллу)

Пункт 2:

1. Шаг 1: Самостоятельно не оценивается.
2. Шаг 2: +1 балл за запись прибыли от r, +2 балла за нахождение верного оптимального Q в зависимости от r
3. Шаг 3: +3 балла за идею сравнения прибылей от r, +3 балла за нахождение верного ограничения на r
4. Шаг 4-5: +1 балл за запись прибыли от r с учетом ограничений, +1 балл за нахождение кандидата в оптимумы $r^* = 13$, +4 балла за нахождение верного оптимального r.
5. Шаг 6: +2 балла за верный ответ (за верно найденную цену и прибыль по 1 баллу)

Пункт 3:

1. Шаг 1: +2 балл за утверждение $P = r + 6$, +2 балла за обоснования
2. Шаг 2: +1 балл за запись прибыли от r, +2 балла за нахождение верного оптимального r, +1 балл за верной найденное P
3. Шаг 3: +2 балл за полностью верное обоснование.

Штрафы:

1. Ответы без обоснования оцениваются в 0 баллов.
2. Отсутствие проверки условия второго порядка в -1 балл за каждое пропущенное условие.
3. За каждую арифметическую ошибку начисляется штраф в 2 балла.
4. При наличие арифметической ошибки, если ошибка не изменила идеи и сложности решения задачи - не начисляются баллы лишь за ошибку в первый раз, а далее работа проверяется с учётом ошибки. Иначе все дальнейшие рассуждения оцениваются в 0 баллов.

5. За любое решение пункта 1 и 2, не учитывающее стратегическое взаимодействие считается идейно неверным и оценивается в 0 баллов.
6. Любое решение пункта 3, в котором последователь максимизирует прибыль без *директивно назначенной цены*, т.е. те случаи, когда в записи прибыли последователя не фигурирует P считается идейно неверным и оценивается в 0 баллов.

Задача 4. Из обезьяны (40 баллов)

Пункт 1 (14 баллов)

1. Старательный школьник получает полезность $U_A = 2(A - 1) + B$, если бы он стал ленивым, то его полезность имела бы вид $U_{A \rightarrow B} = -(A - 1) + 2B + 81$.
2. Ленивый школьник получает полезность $U_B = -A + 2(B - 1) + 101$, если бы он стал старательным, то его полезность имела бы вид $U_{B \rightarrow A} = 2A + (B - 1)$.
3. Тогда по условию $A = X$, а класс будет равновесным при $A > 0$ и $B > 0$, если:

$$\begin{cases} U_A \geq U_{A \rightarrow B} \\ U_B \geq U_{B \rightarrow A} \\ A + B = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(X - 1) + (200 - X) \geq -(X - 1) + 2(200 - X) + 81 \\ -X + 2(200 - X - 1) + 101 \geq 2X + (200 - X - 1) \end{cases}$$

4. Имеем решение системы: $71 \leq X \leq 75$
5. Отдельно заметим, что если все школьники ленивые или все школьники списывающие, то класс тоже является равновесным. Для этого достаточно сравнить соответствующие полезности.

Итого ответ: $X \in [71; 75] \cup \{0, 200\}$ (за правильный ответ принимается и ответ в предположении что школьники только целые и в предположении что школьники только целочисленные)

Пункт 2 (12 баллов)

1. Чтобы все старательные школьники остались старательными необходимо, чтобы $U_A \geq U_{A \rightarrow B}$. Чтобы все ленивые школьники решили стать старательными $U_B < U_{B \rightarrow A}$ (обратите внимание что знак строгий из условия)
2. Пусть в первой лиге и второй лиге по X_1 и X_2 старательных школьников, тогда условия в терминах X_1 и X_2 имеют вид:

$$\begin{cases} 2(X_1 - 1) + (120 - X_1) \geq -(X_1 - 1) + 2(120 - X_1) + 81 \quad \mathbf{(1)} \\ -X_1 + 2(120 - X_1 - 1) + 101 < 2X_1 + (120 - X_1 - 1) \quad \mathbf{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(X_2 - 1) + (80 - X_2) \geq -(X_2 - 1) + 2(80 - X_2) + 81 \quad \mathbf{(3)} \\ -X_2 + 2(80 - X_2 - 1) + 101 < 2X_2 + (80 - X_2 - 1) \quad \mathbf{(4)} \end{cases}$$

3. Имеем: $X_1 > 55$ и $X_2 > 45$
4. Если в работе предполагались бесконечно делимые школьники, то далее верный ответ: $X = X_1 + X_2 > 100$. Если же предполагались целочисленные школьники, то минимальной количество школьников в каждой лиге это $X_1 = 56$ и $X_2 = 46$, то есть минимальное количество старательных школьников 102.

Пункт 3 (9 баллов)

1. Если в первой лиге старательных школьников меньше либо равно 50, то так как из (1) $X_1 \geq 51$ и из (2) $X_1 > 55$, то в этом случае все участники первой лиге решат стать ленивыми и максимальное количество старательных школьников будет не более 80. Если же в первой лиге больше 50 старательных школьников, то во второй лиге старательных школьников не более 40, но так как из (3) $X_2 \geq 42$ и из (4) $X_2 > 45$, все школьники второй лиге решат стать ленивыми и максимальное количество старательных школьников будет не более 120.
2. Если все старательные школьники будут участниками первой лиге, но максимизируемо число школьников как раз составит 120.

Пункт 4 (5 балла)

1. Из 3 пункта нам нужно хотя бы 2 года, так как за год невозможно сделать всех старательными.
2. Из пункта 3 за первый год мы можем сделать 120 старательных школьников к концу первого года, а из пункта 2 имея 120 старательных школьников мы за год можем сделать всех старательными. Тогда сделать всех старательными за 2 года возможно.

Критерии:

Пункт 1:

1. Шаг 1: +1 балл верную формулировку полезностей в двух случаях
2. Шаг 2: +1 балл верную формулировку полезностей в двух случаях
3. Шаг 3: +4 балла за верную систему от X или эквивалентную.
4. Шаг 4: +4 балла за верное решение системы.
5. Шаг 5: +2 балла за указание того что 0 и 200 тоже подходит, +2 балла за обоснование.

Пункт 2:

1. Шаг 1-2: +6 балла за верные системы на X_1 и X_2 .
2. Шаг 3: +2 балла за верное решение системы.
3. Шаг 4: +4 балла за верное обоснование итогового ответа, из них 1 балл за ответ.

Пункт 3:

1. Шаг 1: +6 баллов за верную оценку максимального количества школьников.
2. Шаг 2: +3 балла за верный пример как получить 120 старательных школьников.

Пункт 4:

1. Шаг 1: +3 баллов за верную оценку количества лет.
2. Шаг 2: +2 балла за верный пример как получить 200 старательных школьников.

Штрафы:

1. Ответы без обоснования оцениваются в 0 баллов.
2. При наличие арифметической ошибки, если ошибка не изменила идеи и сложности решения задачи - не начисляются баллы лишь за ошибку в первый раз, а далее работа проверяется с учётом ошибки. Иначе все дальнейшие рассуждения оцениваются в 0 баллов.
3. Если в решении пунктов 1-3 участник игнорирует условие о том что школьник не учитывает себя же в своей полезности, то участник теряет 10 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.
4. Если в решении пунктов 1-3 участник игнорирует условие о том что количество школьников каждого типа не меняются, если сам школьник меняет свой тип, то участник теряет 5 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.
5. Если в решении пунктов 1-3 участник сравнивает полезность ленивых и старательных, вместо того чтобы сравнивать индивидуальные полезности, то участник теряет 10 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.
6. Если в решение пунктов 2 и 3 допущена ошибка из-за отсутствие строгих знаков, то есть игнорируется условие о том что полезность должна быть строго больше чтобы школьник сменил свой тип, участник теряет 5 баллов и далее работа проверяется с учётом ошибки.
7. Если при решении пункта 2 участник не проверяет условие на то что старательный должны остаться старательными и не доказывает почему в его решении оно не обходимо, начисляется штраф в 5 баллов.