ММО-2023, 8 класс, решения и критерии

1. (*М. Евдокимов*) Даны три различных ненулевых числа. Петя и Вася составляют квадратные уравнения, подставляя эти числа в качестве коэффициентов, но каждый раз в новом порядке. Если у уравнения есть хотя бы один корень, то Петя получает фантик, а если ни одного, то фантик достаётся Васе. Первые три фантика достались Пете, а следующие два — Васе. Можно ли определить, кому достанется последний, шестой фантик?

Решение: Квадратное уравнение имеет хотя бы один корень в точности тогда, когда его дискриминант неотрицателен. Если поменять местами первый и последний коэффициенты, то дискриминант не изменится. Значит, все шесть уравнений разбиваются на пары, в каждой из которых либо оба уравнения имеют корни, либо оба не имеют. Поэтому количество уравнений, имеющих корни, чётно. Значит, последний фантик достанется Пете.

Критерии.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

«+.» – приведено верное решение, пропущены или не объяснены некоторые несущественные подробности;

«±» – приведено рассуждение об уравнениях с одинаковым дискриминантом и получен верный ответ, но существенная часть решения не объяснена или пропущена или приведено рассуждение об уравнениях с одинаковым дискриминантом и получен верный ответ, но допущена арифметическая ошибка при выводе формулы дискриминанта;

«∓» – приведено рассуждение об уравнениях с одинаковым дискриминантом, но из-за ошибок в рассуждениях не был получен верный ответ или приведено рассуждение об уравнениях с одинаковым дискриминантом и получен верный ответ, но использована без доказательства неверная формула дискриминанта;

«–» – остальные случаи.

Критерии.

2. (*М. Евдокимов*) На столе в ряд стоят 23 шкатулки, в одной из которых находится приз. На каждой шкатулке написано либо «Здесь приза нет», либо «Приз в соседней шкатулке». Известно, что ровно одно из этих утверждений правдиво. Что написано на средней шкатулке?

Ответ: «Приз в соседней шкатулке».

Решение: Заметим, что на шкатулке, соседней с содержащей приз, всегда написано верное утверждение. А раз у нас всего одно утверждение истинно, то и такая «соседняя» шкатулка всего одна. Но тогда приз лежит в одной из крайних шкатулок, а истинное утверждение написано на соседней с ней шкатулке. Следовательно, шкатулка в центре не содержит приз и должна иметь ложную надпись. А значит, её надпись: «Приз в соседней шкатулке».

Критерии.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

«+.» – приведено верное обоснованное решение, пропущены или не объяснены некоторые несущественные подробности;

«±» – работа содержит обоснованное утверждение о невозможности нахождения приза не с краю и получен верный ответ, но существенная часть решения не объяснена или пропущена или получен верный ответ, но некоторые несущественные случаи не рассмотрены/не объяснены и/или при рассмотрении случаев были допущены ошибки, не повлиявшие на ход решения;

«∓» – работа содержит обоснованное утверждение о невозможности нахождения приза не с краю, но верный ответ не был получен или работа содержит необоснованное утверждение о невозможности нахождения приза не с краю и получен верный ответ или получен верный ответ, но хотя бы один существенный случай не рассмотрен/не объяснен и/или при рассмотрении случаев были допущены ошибки, повлиявшие на ход решения;

«–.» – работа содержит необоснованное утверждение о невозможности нахождения приза не с краю и верный ответ не был получен или некоторые существенные случаи были рассмотрены, но верный ответ не был получен;

«–» – остальные случаи.

3. (*Е. Бакаев*) Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30 градусов одна биссектриса в два раза короче другой.

Решение 1: Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника. Достроим ABC до правильного треугольника ABB'. При этом AK образует со стороной правильного треугольника угол 15°.

Пусть прямая, проходящая через B' параллельно CL, пересекает AB в точке N. Тогда CL — средняя линия в треугольнике $B'NB$, значит, $BN = 2CL$. В то же время отрезок BN, как и AK, образует угол $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ со стороной равностороннего треугольника, значит, $AK = BN = 2CL$.

Решение 2: Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника. Проведем в треугольнике ABC

среднюю линию DF, параллельную BC. Пусть она пересекает биссектрису AK в точке G. Тогда FG — средняя линия треугольника ACK (т.к. $FG||CK$ и F — середина AC), значит, G — середина AK. Т.к. CG — медиана прямоугольного треугольника ACK, $\angle CAG = \angle ACG = 15°$. Т. к. CD — медиана прямоугольного треугольника ABC, $\angle DAC = \angle DCA = 30°$, отсюда $\angle GCD = \angle ACD - \angle ACG = 15°$, $\angle DCL = \angle ACL - \angle ACD = 15°$, $\angle ADF = \angle ABC = 60°$ (соответственные при DF и BC и секущей AB), $\angle FDC = \angle FDA = 60°$ (DF — медиана, а значит, и биссектриса в равнобедренном треугольнике ACD), $\angle CDL = \angle DAC + \angle DCA = 60°$. Треугольники CGD и CLD равны по стороне CD и парам углов $\angle GCD, \angle LCD$ и $\angle CDG, \angle CDL$. Отсюда $CL = CG = AG = AK/2$, что и требовалось.

Решение 3: Пусть дан треугольник ABC, где $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$, AK и CL — биссектрисы, CD — медиана. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $CD = AD = BD$, в треугольнике $\triangle BCD$ есть две равные стороны и угол $60°$, поэтому он равносторонний. Тогда $\angle ABK = \angle CDL = 60°$. При этом $\angle KAB = \frac{1}{2}\angle BAC = 15°$ и $\angle LCD = \angle ACL - \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB - \angle BAC = 15°$. Тогда треугольники ABK и CDL подобны по двум углам. Поэтому $AK/CL = AB/CD = AB/BC = 2$, что и требовалось.

Решение 4: Пусть дан треугольник ABC, где $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$, AK и CL — биссектрисы. Построим точку M так, что $CLAM$ будет параллелограммом. Тогда $\angle BCM = 90° + \angle ACM = 90° + \angle CAB = 120°$, а $\angle KAM = 15° + \angle CAM = 15° + \angle ACL = 60°$. Это значит, что точки A, K, C и M лежат на одной окружности. Рассмотрим треугольник AKM. В нем $\angle KAM = 60°$, а $\angle AMK = \angle ACK = 90°$ в силу вписанности $AKCM$. Следовательно, его гипотенуза AK вдвое больше катета AM по свойству прямоугольного треугольника с углом $60°$. Тогда $AK = 2AM = 2CL$ в силу свойства параллелограмма.

Критерии.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

«±» – приведено верное решение с использованием не вполне обоснованных утверждений, легко следующих из доказанных в решении фактов.

«–» – остальные случаи, в том числе, если доказываются верные утверждения, которые не помогают в продвижении в задаче или счетное решение (с помощью координат, векторов или выражения длин отрезков) с хотя бы одной любой ошибкой или не доведенное до конца

4. (*В. Клепцын, К. Кноп*) Назовём натуральное число *хорошим*, если в его десятичной записи есть только нули и единицы. Пусть произведение двух хороших чисел оказалось хорошим числом. Правда ли, что тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Ответ: Не обязательно.

Решение: Рассмотрим произведение двух хороших чисел

$$\left(10^2+10^4+10^8+\cdots+10^{1024}\right)\left(10^{N-2}+10^{N-4}+10^{N-8}+\cdots+10^{N-1024}\right),$$

где N— большое чётное число (например, миллион). Когда мы раскроем все скобки, то получим много слагаемых, каждое из которых — степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы хорошее число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, получились какие-то слагаемые одинаковыми. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, где $x \neq y$, то $a+N-b = x+N-y$, откуда $a+y = b+x$. Так как a, b, x, y — степени двойки, равенство возможно лишь в случае $a = b, x = y$. Значит, у нас будет 10 совпавших слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Заметим, что никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный.

Поэтому сумма слагаемых будет хорошим числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше, чем произведение сумм цифр исходных чисел.

Критерии.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

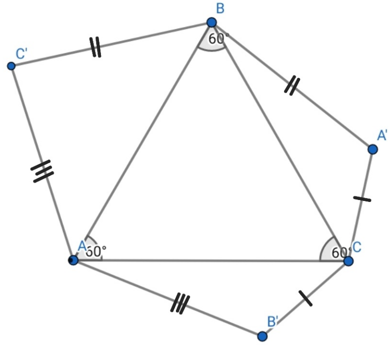
«+.» – приведен верный пример, но не объяснено, почему в разряде слева от 10 (11) единиц обязательно будет 1 и/или ошибка на 1 при подсчете количества единиц в числе (например, в приведенном примере 11 единиц, но утверждается, что 10), в целом не влияющая на ход решения;

«±» – приведен верный пример в явном виде (т.е. в явном виде выписаны два сомножителя как сумма степеней 10 или перечислены номера разрядов с единицами), но не доказывается (или доказывается неверно), что кроме ключевого разряда не найдется других разрядов с совпадающими единицами (также возможны ошибки из предыдущего абзаца);

«–.» – предложено рассмотрение перемножение двух чисел, состоящих из 10 (11) единиц и какого-то количества нулей, сформулирована идея обеспечить столбик из 10 (11) единиц и отсутствие других столбиков с повторами (но примера нет или он неверный и не объясняется, как обеспечить отсутствие совпадений);

«–» – остальные случаи

5. (*Д. Бродский*) На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше 120 градусов, а для сторон выполняются равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.



Решение: Чтобы из предложенных отрезков можно было сложить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из отрезков AB', BC', CA' меньше суммы двух других. Мы можем считать, что наибольший из этих отрезков — это AB'. Тогда повернем треугольник $AB'C$ на 60 градусов против часовой стрелки относительно точки A. Точка C при этом перейдет в точку B из-за того, что треугольник ABC — правильный, а точка B' — в новую точку B''. В полученном треугольнике $AC'B''$ боковые стороны AC' и AB'' равны, а угол между ними больше 60 градусов, поскольку угол $C'AB'$ по условию больше 120 градусов. Следовательно, углы при основании будут меньше 60 градусов. Поскольку в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $C'B'' > AB'' = AB'$. Рассмотрим треугольник $B''C'B$. В нем по неравенству треугольника $C'B'' < BC' + B''B = BC' + CB' = BC' + CA'$. Тогда из двух полученных неравенств следует, что $AB' < C'B'' < BC' + CA'$. Значит, из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

Критерии.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

«+.» – после поворота треугольника или его достраивания есть легко устранимые ошибки в неравенствах или не приведено обоснование величины угла $C'AB$”;

«∓» – верное решение для выпуклого шестиугольника, не работающее для невыпуклого

«–.» – есть попытка отразить точку C' относительно AB и дальнейшее использование без доказательства факта, что точка лежит внутри треугольника $A'B'C'$ (неравенство резинки, к примеру);

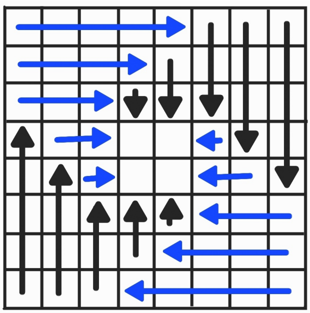
«–» – остальные случаи, в том числе, если при работе с неравенствами (путем вычета одного неравенства из другого) были получены неверные выводы, или построение вывода на основании того, что нужно вывести.

6. (*В. Новиков*) На каждую клетку доски 8×8 поставили по сторожу. Каждый сторож может смотреть в одном из четырёх направлений (вдоль линий доски) и сторожить всех сторожей на линии своего взгляда. Для какого наибольшего k можно так направить взгляды сторожей, чтобы каждого сторожа сторожили не менее k других сторожей?

Решение: Ответ: 5. Докажем, что $k \leq 5$. Для этого предположим, что $k \geqslant 6$. Рассмотрим сторожей, стоящих в углах доски. На каждого из них смотрят по крайней мере 6 сторожей, и эти сторожа должны стоять у края доски. При этом, если какой-то сторож видит одного из угловых сторожей, то он не видит других угловых сторожей. Таким образом хотя бы 24 сторожа, стоящих у края доски смотрят вдоль сторон доски. Тогда «внутрь» доски, не на угловых сторожей, смотрит не более четырёх сторожей, стоящих у границ.

Рассмотрим теперь сторожей, стоящих в центральном квадрате 6×6. Посчитаем для них максимально возможное количество «входящих взглядов». (Взгляды, обращённые на сторожей на границе доски подсчитывать не будем). Это число не превосходит $184 = 24+100+48+12$. (24 — от четырёх сторожей на границе, 100 — по 5 взглядов от каждого из 20 сторожей на границе квадрата 6×6, 48 — по 4 взгляда от каждого из 12 сторожей на границе квадрата 4×4, 12 — по 3 взгляда от каждого из 4 сторожей из центрального квадрата 2×2.) Таким образом на 36 сторожей приходится $184 = 36 \cdot 5 + 4 < 36 \cdot 6$ взглядов. Значит, среди сторожей есть те, которым досталось меньше 6 взглядов.

Примеры для $k = 5$ могут быть устроены по-разному. Один из вариантов изображён на рисунке (длинные стрелки означают, что несколько сторожей подряд смотрят в одну сторону, сторожа в центре могут смотреть в любую сторону).



Критерии.

Арифметические ошибки (или ошибки в подсчете числа определенных клеток) никак не влияют на оценивание, если не повлияли на ход решения.

«+» – приведено верное обоснованное решение;

«$\pm$» – приведен верный пример+оценка с небольшими (легко исправимыми) недочетами, в результате которых оценка не упростилась;

«$\mp$» – приведен верный пример или выполнена верная оценка;

«$-.$» – приведена оценка с небольшими недочетами;

«$-$» – остальные случаи, в том числе, если приведена оценка с любыми существенными недочетами, оценка больше 5, пример меньше 5.