7 класс в Математической вертикали

Задача 1. Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр, то ли морских котиков; Серёжа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько выдр, тюленей и морских котиков было в дельфинарии?

[*4 балла*] (*Т. Казицына*)

Ответ. 5 выдр, 7 тюленей, 6 морских котиков.

Решение. Раз никто из детей не ошибся, то из выдр, морских котиков и тюленей кого-то было ровно 5, кого-то — ровно 6, а кого-то — ровно 7. Серёжа запомнил, что меньше всего (значит, 5) было тюленей или выдр, а Игорь — что 5 было выдр или морских котиков. Значит, 5 было именно выдр. Тогда 7 было не выдр, а тюленей. Следовательно, 6 — морских котиков.

Задача 2. Найдите какое-нибудь решение ребуса $Ф/Е + ВР/АЛЬ = 1$. Разным буквам соответствуют разные цифры. Черта обозначает деление. **[*5 баллов*]** (*Э. Акопян*)

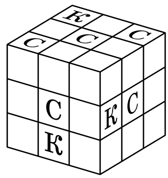
Ответ. Возможны разные варианты, например:

$$2/4 + 79/158 = 1, \quad 6/8 + 35/140 = 1, \quad 4/5 + 72/360 = 1$$

и другие.

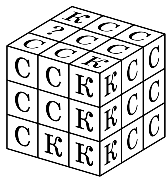
Задача 3. Ваня сложил куб $3 \times 3 \times 3$ из красных и синих брусков размером $1 \times 1 \times 3$. Затем он начал рисовать то, что у него получилось. Когда пришла Таня, Ваня успел раскрасить лишь 8 из 27 клеток на видимой поверхности нарисованного куба (см. рисунок). Посмотрев на рисунок, Таня сказала, что не знает цвет лишь одной из ещё не раскрашенных клеток. Ваня ответил, что эта клетка — красная. Завершите Ванин рисунок (отметьте буквой «С» синие клетки, буквой «К» красные, знаком «?» клетку, цвет которой Таня не могла восстановить). **[*6 баллов*]**

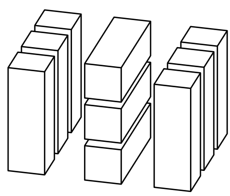
(*М. Евдокимов, Т. Казицына*)



Ответ. См. рисунок справа.

Решение. Сперва определим, как расположены бруски в кубе. Брусок, который проходит через синюю клетку на передней грани, снизу и справа ограничен красными кубиками $1 \times 1 \times 1$, поэтому проходит через центр куба $3 \times 3 \times 3$. Назовём этот брусок *центральным*. Красная и синяя клетки на правой грани принадлежат двум разным брускам, и оба эти бруска вертикальны (идти слева направо они не могут из-за центрального бруска). Значит, оставшиеся клетки на правой грани входят в ещё один вертикальный брусок. Теперь понятно, что куб состоит из трех слоев, в правом бруски вертикальные, в центральном горизонтальные, в левом снова вертикальные (см. рисунок справа). В каждом бруске,



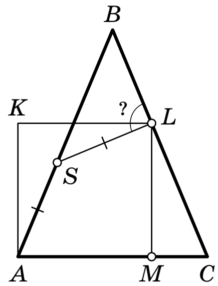


кроме среднего в левом слое, есть клетка известного цвета. Остается неизвестным цвет одного бруска, а значит, и его верхней клетки.

Задача 4. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4). **[*7 баллов*]**

Задача 5. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и квадрат $AKLM$ расположены, как показано на рисунке. Точка S на AB такова, что $AS = SL$. Найдите величину угла SLB. **[*8 баллов*]**

(*Л. Попов*)



Ответ. 90°.

Решение. Рассмотрим треугольники AKS и LKS. Они равны по трём сторонам. Значит, равны углы KAS и KLS.

В равнобедренном треугольнике ABC равны углы BAC и ACB. Прямые KL и AC параллельны, значит, равны углы ACB и KLB как соответственные. Тогда $\angle SLB = \angle SLK + \angle KLB = \angle KAS + \angle ACB = \angle KAS + \angle BAC = \angle KAM = 90^\circ$.

Задача 6. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 7 г? **[*4 балла*]**

б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний? **[*6 баллов*]** (*М. Евдокимов*)

Ответ. а, б) Да, может.

Решение. а) Возьмём по одной монете из каждого из мешков, кроме указанного, и поместим на левую чашку, а на правую поместим 8 монет из указанного мешка.

Тогда в случае, если в указанном мешке монеты минимального веса (7 г), правая чашка окажется легче: $8+9+10+11+12+13>8\cdot 7$. В противном случае легче окажется левая чашка: на ней будет лежать менее 63 г, а справа окажется не менее $8\cdot 8=64$ г.

б) См. задачу 6 для 7 класса (с. 14).