

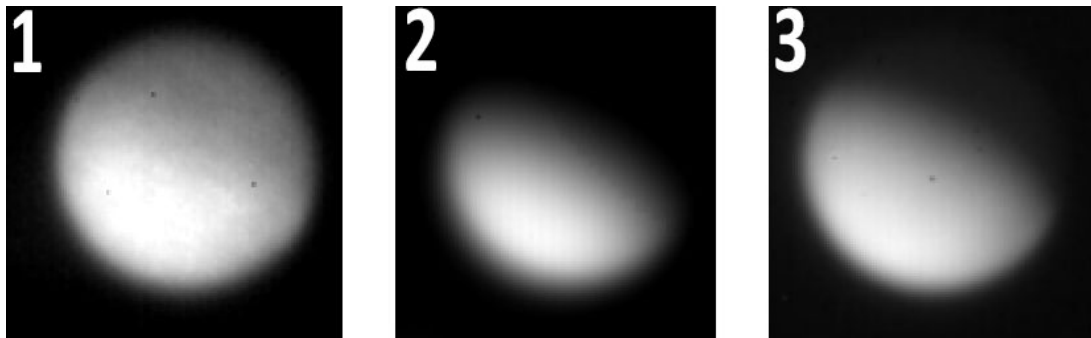
# LXXVIII Московская астрономическая олимпиада (2024 г.)

## Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

10 класс

### Задача 1

На рисунке представлены 3 фотографии Венеры, полученные в разных частях инфракрасного диапазона спектра в один момент времени. Расставьте их в порядке увеличения длины волны излучения. Объясните свой выбор. Вблизи какой фазы наблюдалась планета?



**Решение.** В коротких длинах волн Венера светит отражённым светом, а на длинных уже собственным тепловым излучением, отчего фаза становится не так заметна. Следовательно, правильная последовательность 2 – 3 – 1. Длины волн на этих снимках: 2.2, 3.5, 4.5 микрона.

На самом коротковолновом изображении видно чуть больше половины диска планеты. Значит, наблюдения были тогда, когда Венера была около максимальной элонгации, а фаза была 0.5.

#### Критерии проверки

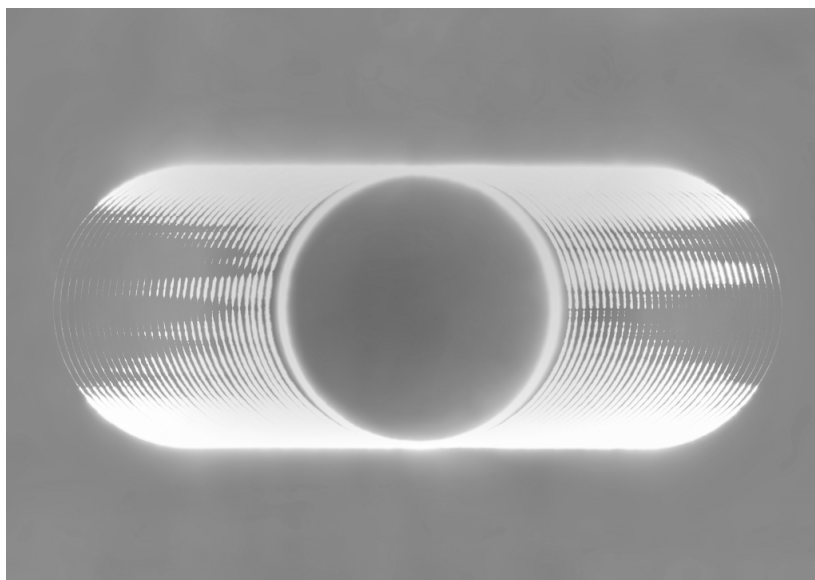
- |                                  |         |
|----------------------------------|---------|
| 1. Правильное объяснение явления | 2 балла |
| 2. Правильный порядок            | 1 балл  |
| 3. Фаза                          | 1 балл  |

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(С. Г. Желтоухов)

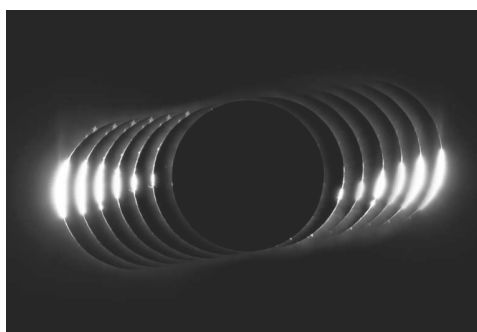
## Задача 2

На рисунке показан коллаж из фотографий кольцеобразного солнечного затмения, сделанный Ваном Лэтянем. Объясните природу тёмных полос справа и слева от расположенного в центре изображения Солнца в максимальной фазе затмения. Все расположенные справа и слева изображения были получены за 10 секунд в начале и конце кольцеобразной фазы. В какую сторону на этом изображении двигалась Луна, если левая часть коллажа была получена раньше правой?



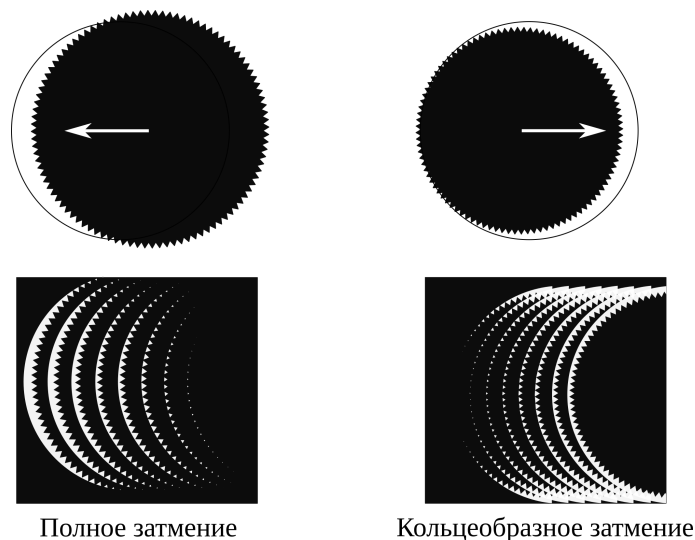
**Решение.** Наблюдаемое явление называется чётки Бейли. Возникает оно из-за того, что край диска Луны немного неровный и непосредственно перед началом (после окончания) полной фазы между возвышенностями на поверхности луны проглядывает Солнце. Наблюдатель видит цепочку ярких точек вдоль края Луны.

Однако здесь картина несколько необычная. Рассмотрим образование чёток Бейли в начале полного солнечного затмения. Передний край лунного диска закрывает остатки Солнца. В течение нескольких секунд последние солнечные лучи пробиваются между неровностями лунного рельефа, но их число быстро уменьшается, и чётки гаснут. Типичный коллаж чётки Бейли для полного солнечного затмения выглядит примерно так:



Видим, что здесь картина обратная той, что показана в условии: яркие пятна гаснут по мере приближения к середине изображения. Почему же во время кольцеобразного затмения всё выглядит иначе?

Обратимся к схематичному изображению затмения ниже. Лунный лимб для ясности изображен преувеличенно неровным. Во время кольцеобразного затмения Луна полностью не закрывает Солнце. Поэтому в тот момент, когда диск Луны полностью вступает на солнечный диск, «совпадает» задний край лунного диска с солнечным. Затем наблюдается картина, характерная для конца полного затмения: между лунными горами начинают всё больше и больше проникать солнечные лучи, пока отдельные «бусины» не сольются в дугу кольца вокруг лунного диска. Поэтому тёмные полосы заканчиваются вблизи центра изображения. В конце кольцеобразной фазы ситуация повторяется в обратном порядке.



Таким образом, мы объяснили причину образования полос, а заодно выяснили, что на изображении диск Луны перемещался слева направо.

*Необходимое замечание.* На изображении не помечены стороны света. Не известна ориентация камеры. Оптическая система может переворачивать изображение. Поэтому обоснование направления движения Луны на основе направления движения Солнца или Луны относительно сторон света несостоятельно. Также утверждение о том, что раз левая часть изображения была получена раньше, то и Луна движется слева направо, неверно, если не подтверждено правильным описанием явления. Обратите внимание на рисунок, поясняющий метод получения коллажа. В обоих случаях показана часть коллажа, полученная непосредственно перед полной / кольцеобразной частью, однако направление движения Луны разное.

Фотография в условии: Wang Letian с сайта [Astronomy Picture of the Day](#).

Фотография в решении: Wang Letian с сайта [Astronomy Picture of the Day](#).

### Критерии проверки

- |  |                |
|--|----------------|
| 1. Правильное объяснение образование полос | <b>3 балла</b> |
| 2. Направление движения Луны               | <b>1 балл</b>  |

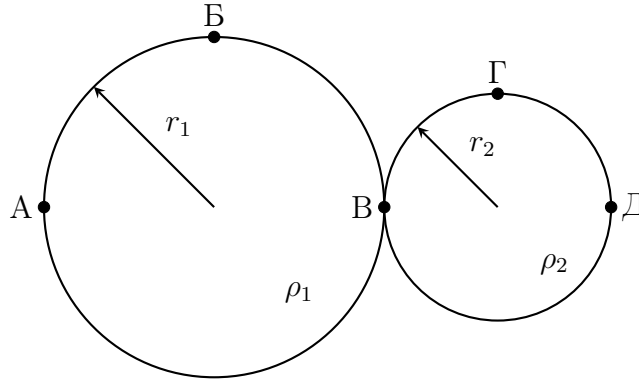
Оценивается только при наличии правильного обоснования.

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(М. В. Силантьев)

**Задача 3**

На рисунке показан астероид, состоящий из двух слипшихся фрагментов сферической формы. Радиус большего фрагмента  $r_1$  в 1.5 раза больше второго, а его плотность  $\rho_1$  а 2 раза меньше. Вещество в обоих фрагментах распределено равномерно. Во сколько раз ускорение свободного падения в точках Б, В, Г, Д больше или меньше, чем в точке А? Определите угол вектора ускорения свободного падения с нормалью в точках Б и Г, а также его направление в точке В.



**Решение.** Каждый из фрагментов астероида притягивает пробное тело, как материальная точка, помещённая в центр этого фрагмента, поэтому ускорение свободного падения в каждой из обозначенных точек каждый раз будет векторной суммой двух ускорений.

Определим ускорение свободного падения в точке А:

$$a_A = \frac{Gm_1}{r_1^2} + \frac{Gm_2}{(2r_1 + r_2)^2} = \frac{Gm_1}{R_1^2} \left[ 1 + \frac{m_2/m_1}{(2 + r_2/r_1)^2} \right].$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — массы фрагментов. В итоговом выражении величина в скобках зависит только от отношений величин, которые мы можем вычислить, тогда как второй множитель, представляющий собой ускорение свободного падения на поверхности первого фрагмента в отсутствие второго, нам не известен. Однако поскольку нам требуется найти отношение ускорений, то вычислять его и не надо. Достаточно искомое ускорение вычислить в таком же виде.

Для упрощения вычислений введём следующие величины:

$$a_0 = \frac{Gm_1}{r_1^2}, \quad r = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2 r_2^3}{\rho_1 r_1^3} = \frac{2}{1.5^3} \approx 0.593.$$

Тогда ускорение в точке А равно

$$a_A = a_0 \left[ 1 + \frac{\mu}{(2 + r)^2} \right] \approx 1.08a_0.$$

В точке Д ускорения сонаправлены, следовательно,

$$a_D = \frac{Gm_1}{(r_1 + 2r_2)^2} + \frac{Gm_2}{r_2^2} = a_0 \left[ \frac{1}{(1 + 2r)^2} + \frac{\mu}{r^2} \right] \approx 1.52a_0.$$

Итого, в точке Д ускорение свободного падения в 1.4 раза больше, чем в точке А.

В точке В ускорения каждого из фрагментов направлены всё также вдоль одной линии,

но в разные стороны. Тогда

$$a_B = \frac{Gm_2}{r_2^2} - \frac{Gm_1}{r_1^2} = a_0 \left( \frac{\mu}{r^2} - 1 \right) \approx 0.33a_0.$$

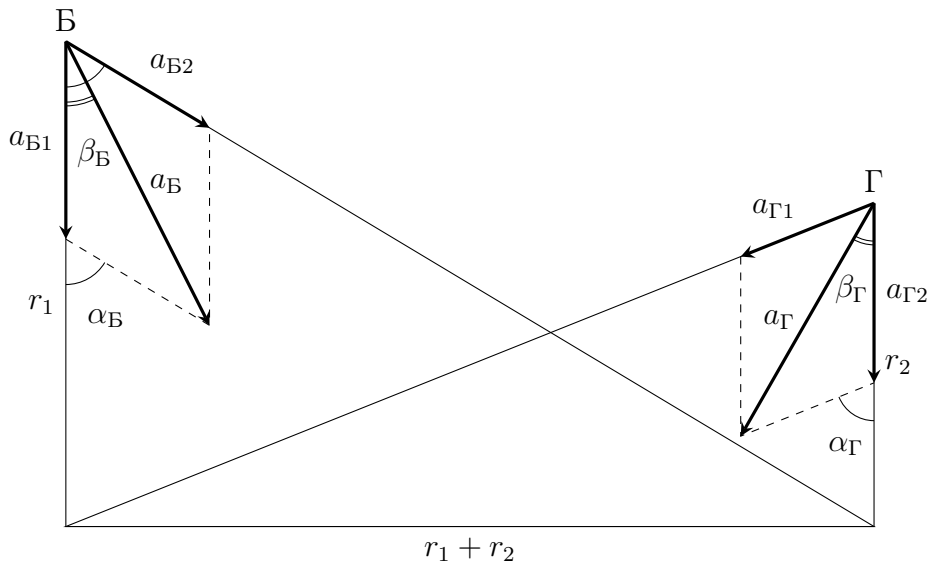
Значит, в точке В ускорение свободного падения в 3.3 раза меньше, чем в А, и направлено в сторону второго фрагмента.

Перейдём к оставшимся более сложным случаям. В точке Б угол между направлениями ускорений  $a_{B1}$  и  $a_{B2}$  (см. рисунок ниже) равен

$$\alpha_B = \arctg \frac{r_1 + r_2}{r_1} = \arctg(1 + r) \approx 59^\circ.$$

Тогда искомое ускорение находим из теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} a_B &= \sqrt{\frac{G^2 m_1^2}{r_1^4} + \frac{G^2 m_2^2}{(2r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)^2} - \frac{2G^2 m_1 m_2}{2r_1^4 + 2r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2} \cos(180^\circ - \alpha_B)} = \\ &= a_0 \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{(2 + 2r + r^2)^2} + \frac{2\mu}{2 + 2r + r^2} \cos \alpha_B} \approx 1.09a_0. \end{aligned}$$



Ускорение  $a_B$  почти равно (чуть больше) ускорению  $a_A$ . Угол  $\beta_B$  к нормали находим из теоремы синусов:

$$\frac{a_B}{\sin(180^\circ - \alpha_B)} = \frac{a_{B2}}{\sin \beta_B} \Rightarrow \beta_B = \arcsin \left( \frac{a_{B2}}{a_B} \sin \alpha_B \right) \approx 7.1^\circ.$$

Здесь мы учли, что ускорение  $a_{B2}$  можно представить в виде

$$a_{B2} = \frac{Gm_2}{2r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2} = a_0 \frac{\mu}{2 + 2r + r^2} \approx 0.16a_0.$$

Для точки Г повторяем все вычисления сходным образом. Угол между направлениями векторов

$a_{\Gamma_1}$  и  $a_{\Gamma_2}$ :

$$\alpha_{\Gamma} = \arctg \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \arctg \left( \frac{1}{r} + 1 \right) \approx 68.2^\circ.$$

Ускорение свободного падения

$$\begin{aligned} a_{\Gamma} &= \sqrt{\frac{G^2 m_2^2}{r_2^4} + \frac{G^2 m_1^2}{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2)^2} + \frac{2G^2 m_1 m_2}{r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2^3 + 2r_2^4}} \cos \alpha_{\Gamma} = \\ &= a_0 \sqrt{\frac{\mu^2}{r^4} + \frac{1}{(1 + 2r + 2r^2)^2} + \frac{2\mu}{r^2 + 2r^3 + 2r^4}} \cos \alpha_{\Gamma} \approx 1.48 a_0. \end{aligned}$$

Оно оказалось больше, чем в точке А, в 1.2 раза. Угол к нормали равен

$$\beta_{\Gamma} = \arcsin \left( \frac{a_{\Gamma_1}}{a_{\Gamma}} \sin \alpha_{\Gamma} \right) \approx 11^\circ.$$

### Критерии проверки

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1. Выражение для ускорения в точке А   | <b>1 балл</b>     |
| 2. Искомые отношения ускорений   | <b>по 1 баллу</b> |
| Если формулы для ускорений в точках Б ... Д записаны верно, то оценивается с учётом возможной ошибки на этапе 1. |                   |
| 3. Вычисление $\beta$  | <b>по 1 баллу</b> |
| 4. Направление в точке В   | <b>1 балл</b>     |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

### Задача 4

Инопланетяне решили создать гигантский «гирляндный шар», для чего покрыли поверхность далёкой экзопланеты земного радиуса множеством лампочек. Раз в 2 часа этот шар загорается на микросекунду, после чего гаснет. Суммарная излучённая шаром (всеми лампочками) в фильтре V за вспышку энергия  $Q = 2 \cdot 10^{21}$  Дж. Будет ли виден этот шар невооружённым глазом с Земли? Какую звёздную величину покажет высокоскоростной чувствительный фотометр со временем накопления  $\delta t = 2$  мс, и как она будет изменяться во время вспышки? Расстояние до экзопланеты  $L = 10$  пк. Считайте, что в процессе вспышки все лампочки загораются одновременно и каждая при этом излучает изотропно. Поверхность планеты чёрная. Влиянием атмосферы Земли пренебрегите.

**Решение.** Луч света проходит радиус Земли за время  $t = R_{\oplus}/c = 6370/300000 \approx 0.021 = 21$  мс. Эта величина меньше времени накопления сигнала глазом  $\Delta t = 50$  мс (см. справочные данные), но больше времени накопления фотометра  $\delta t$ . Поэтому для глаза это будет краткая вспышка, за время которой будет получена вся дошедшая до него энергия, тогда как фотометр в течение нескольких тактов работы будет способен фиксировать динамику вспышки.

Каждая лампочка излучает во все стороны, при этом половина излучения попадает в поверхность планеты и полностью поглощается. Поэтому энергия, излучённая в пространство во время вспышки, равна  $Q/2$ . Эта энергия распределится на сферу площадью  $4\pi L^2$ . Поскольку время экспозиции глаза  $\Delta t$ , получим освещённость на Земле от вспышки

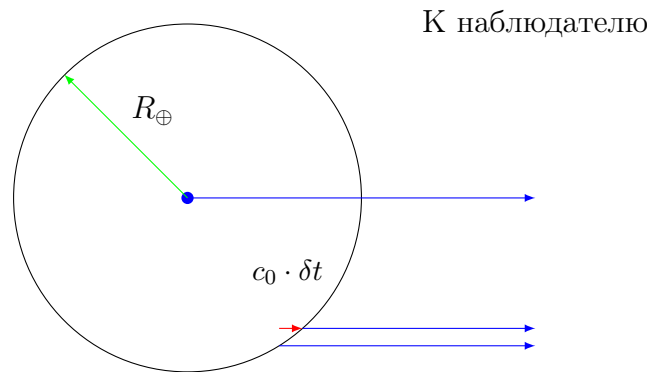
$$E = \frac{Q/2}{4\pi L^2 \Delta t} = \frac{10^{21}}{4 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^2 \cdot 0.05} \approx 1.7 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/м}^2.$$

В полосе  $V$  от Солнца к Земле приходит  $600 \text{ Вт/м}^2$  (см. справочные данные). Учитывая, что видимая звёздная величина Солнца  $-26.8$ , получаем видимую звёздную величину шара для глаза

$$m_r = -26.8 - 2.5 \lg \frac{1.7 \cdot 10^{-14}}{600} \approx 14.6^m.$$

Очевидно, что такой тусклый объект рассмотреть не удастся.

В отличие от глаза, фотометр будет принимать излучение от шара в несколько этапов. На первом этапе до него доберутся фотоны, излучённые ближайшей частью шара, на следующем — из кольца вокруг предыдущей зоны и т.д. Время свечения шара на три порядка меньше времени регистрации сигнала и на результат не влияет.



Из рисунка ясно, что искомая физическая площадь шара  $S$ , одновременно видимая горячей, равна площади шарового слоя с высотой  $c\delta t$ :

$$S = 2\pi R_{\oplus} \cdot c\delta t$$

Таким образом, все шаровые слои будут иметь равную площадь, а значит, фотометр будет фиксировать каждый раз равное число фотонов, то есть яркость шара в течение всего времени наблюдения вспышки будет постоянной, за исключением первого и последнего отсчётов, когда свет может приходиться не всё время экспозиции.

Вспышка длится  $t/\delta t \approx 10$  времён экспозиции. На столько же уменьшается принимаемая фотометром энергия за время  $\delta t$ . Значит, в течение измерения освещённость фотометра составит

$$E_2 = \frac{Q/2}{4\pi L^2 \frac{t}{\delta t} \delta t} = \frac{Q/2}{4\pi L^2 t} = \frac{10^{21}}{4 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^2 \cdot 0.021} \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/м}^2,$$

что соответствует звёздной величине

$$m_{\Phi} = -26.8 - 2.5 \lg \frac{4 \cdot 10^{-14}}{600} \approx 13.6^m.$$

### Критерии проверки

- |  |        |
|--|--------|
| 1. Продолжительность вспышки 21 мс                               | 1 балл |
| 2. Фотометр «видит» расходящиеся кольца                          | 1 балл |
| 3. Блеск во время вспышки постоянный                             | 1 балл |
| 4. Половина энергии, излучённой лампочками, поглощается планетой | 1 балл |

Если этот этап не сделан, остальные оцениваются в полном объёме.

- |  |        |
|--|--------|
| 5. Освещённость при наблюдении глазом          | 1 балл |
| 6. Звёздная величина при наблюдении глазом     | 1 балл |
| 7. Освещённость при наблюдении фотометром      | 1 балл |
| 8. Звёздная величина при наблюдении фотометром | 1 балл |

Если этапы 5 и 7 выполнены неверно, то за этапы 6 и 8 вместе выставляется всего 1 балл при условии правильного выполнения.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. М. Ажакин)

### Задача 5

Азимут звёзд вблизи зенита меняется очень быстро. Для слежения за ними телескопу на азимутальной монтировке необходимо успевать поворачиваться с нужной скоростью. Найдите максимальную высоту звезды, за которой может следить телескоп, если его максимальная скорость точного ведения составляет  $0.18^\circ$  в секунду. Также оцените максимальную скорость вращения деротатора поля (устройство, предотвращающее вращение изображения на приёмнике) для слежения за окрестностями этой звезды. Телескоп находится на  $41^\circ$  с. ш.

**Решение.** Для решения задачи нарисуем суточную параллель звезды вблизи зенита (жирная стрелка). Окружностью обозначен альмукантарат с зенитным расстоянием  $z$ , а  $\Delta A$  — изменение азимута за единицу времени  $\Delta t$ . За это же время звезда проходит расстояние  $\omega \Delta t$  вдоль жирной стрелки, где  $\omega$  — её угловая скорость.

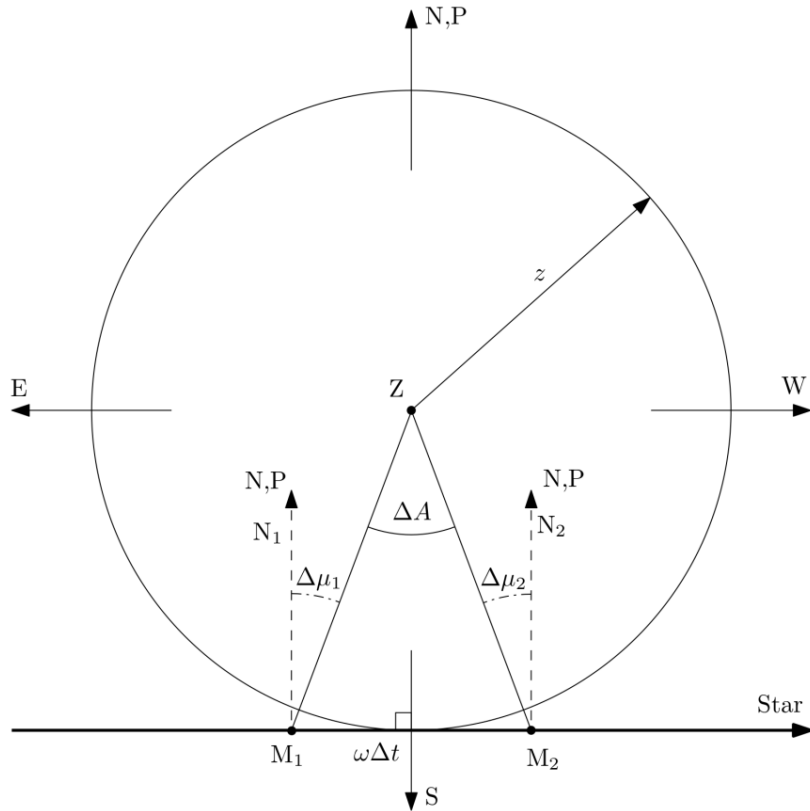
Найдем угловую скорость звезды. Склонение звезд, проходящих через зенит, равно широте места наблюдения. Наша звезда проходит вблизи зенита, поэтому будем считать, что её склонение  $\delta = 41^\circ$ . Тогда угловая скорость движения звезды по небу

$$\omega = 15^\circ/\text{ч} \cos \delta = 11.3^\circ/\text{ч} = 3.14^\circ \cdot 10^{-3}/\text{с}.$$

После этого мы можем найти зенитное расстояние  $z$ , соответствующее нашей скорости изменения азимута:

$$\begin{aligned} \Delta A \cdot z &= \omega \cdot \Delta t, \\ z &= \frac{\omega}{\Delta A / \Delta t} = 1.0^\circ. \end{aligned}$$





Заметим, что скорость изменения азимута тут должна быть выражена в радианах в секунду, а зенитное расстояние и угловая скорость — в одинаковых единицах, например, в градусах. Таким образом, этот телескоп не может наблюдать объекты выше  $89^\circ$  над горизонтом.

Для определения скорости вращения деротатора заметим, что по сравнению с одним градусом зенитного расстояния полюс Мира находится сильно дальше, в  $49^\circ$ , а значит, направления на полюс Мира из любой точки на рисунке будут примерно параллельны. Направления на полюс Мира из двух точек траектории звезды (между которыми она провернулась на азимут  $\Delta A$  обозначены пунктирными стрелочками  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ . Изменение угла поворота деротатора поля равно изменению угла между зенитом и полюсом Мира в процессе движения звезды и равно

$$\Delta\mu = \Delta\mu_1 + \Delta\mu_2 = \Delta A$$

Таким образом максимальная скорость вращения деротатора равна скорости вращения телескопа по азимуту, то есть  $0.18$  градуса в секунду.

**Критерии проверки**

- |  |                |
|--|----------------|
| 1. Угловая скорость звезды   | <b>2 балла</b> |
| 2. Максимальная высота звезды  | <b>2 балла</b> |
| 3. Вывод, что должна сохраняться ориентация кадра относительно полюса мира | <b>1 балл</b>  |
| 4. Скорость вращения деротатора  | <b>3 балла</b> |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

### Задача 6

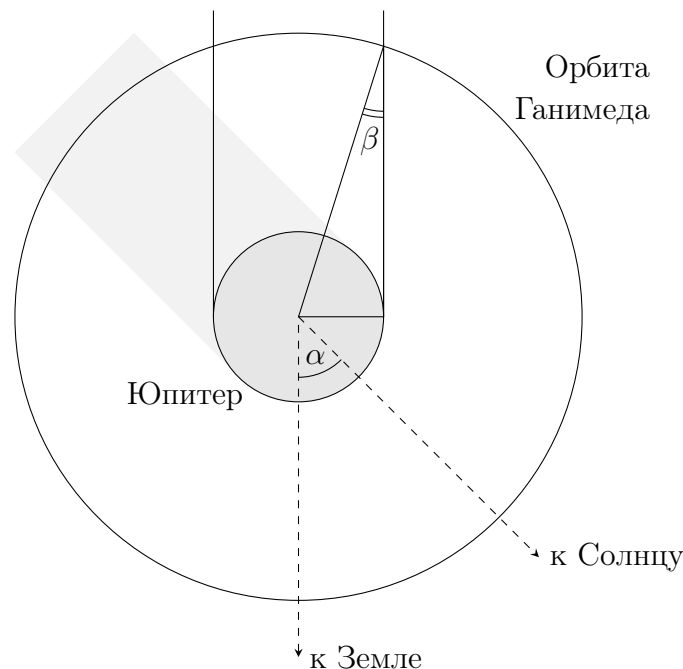
Для наблюдателя на Земле Ганимед скрылся за Юпитером, находящимся в восточной квадратуре. За какой край диска Юпитера, светлый или тёмный, зашёл Ганимед? Через какое время спутник снова можно будет видеть земному наблюдателю и как долго он будет оставаться видимым? Орбиты планет и спутника круговые, лежащие в одной плоскости. Смещением Юпитера и Земли по орбите за несколько дней пренебречь.

Радиус орбиты Ганимеда —  $1.07 \cdot 10^6$  км.

**Решение.** На возможность наблюдения Ганимеда влияют два фактора. Во-первых, он невидим, пока находится за Юпитером по отношению к земному наблюдателю. Во-вторых, когда он находится в тени Юпитера, его не освещает Солнце, и он, опять же, недоступен для наблюдения. При этом, если Ганимед входит в тень Юпитера, находясь за Юпитером для земного наблюдателя, то его период невидимости просто оказывается длинным. Однако возможен и другой вариант: спутник сначала появляется из-за диска планеты, становясь видимым, и только затем пропадает в тени.

Юпитер находится в восточной квадратуре, то есть наблюдается в  $90^\circ$  к востоку от Солнца. Значит, небольшая часть ночной стороны Юпитера должна быть видна с восточного края его диска, а спутник заходит за западный, то есть освещённый край.

Изобразим на рисунке Юпитер, орбиту Ганимеда, направления на Землю и Солнце, тень Юпитера и зону, в которой не видно спутник с Земли.



Юпитер находится в 5.2 раза дальше от Солнца, чем Земля, а значит, угловой размер Солнца при наблюдении с Юпитера во столько же раз меньше, то есть около  $6'$ . Этой величине равен угол схождения тени Юпитера. На расстоянии Ганимеда тень меньше диаметра Юпитера примерно на 2.5%, чем можно пренебречь. Угловой диаметр Юпитера при наблюдении с Земли ещё меньше,  $38''$ , так что расширением зоны невидимости спутника также можно пренебречь.

Теперь задача становится совсем простой. Дуга орбиты Юпитера, на которой он не виден

с Земли, равна дуге, находящейся в тени Юпитера. Её величина равна

$$2\beta = 2 \arcsin \frac{R_{\text{Ю}}}{r_{\Gamma}} \approx 7.5^\circ.$$

Здесь  $R_{\text{Ю}}$  — радиус Юпитера,  $r_{\Gamma}$  — радиус орбиты Ганимеда. Поскольку угол между направлениями на Солнце и Землю равен

$$\alpha = \arcsin \frac{a_{\text{З}}}{a_{\text{Ю}}} \approx 11^\circ,$$

где  $a_{\text{З}} = 1$  а.е. — радиус орбиты Земли, а  $a_{\text{Ю}}$  — радиус орбиты Юпитера, то два участка невидимости Ганимеда не пересекаются.

Период обращения Ганимеда вокруг Юпитера можно найти из третьего закона Кеплера:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_{\Gamma}^3}{GM_{\text{Ю}}}} \approx 7.15 \text{ сут.}$$

Тогда Ганимед появится из-за диска Юпитера через

$$t_1 = \frac{2\beta}{360^\circ} T = \frac{7.5^\circ}{360^\circ} \cdot 7.15 \approx 3.6 \text{ ч}$$

и будет виден до захода в тень в течение

$$t_2 = \frac{\alpha - 2\beta}{360^\circ} T = \frac{11^\circ - 7.5^\circ}{360^\circ} \cdot 7.15 \approx 1.7 \text{ ч.}$$

*Замечание.* Если бы мы не пренебрегли сужением тени Юпитера, то получили бы, что тень закрывает  $7.4^\circ$  орбиты Ганимеда и время видимости спутника перед заходом в тень примерно на 0.1 часа или 7 минут больше.

### Критерии проверки

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Правильное определение края диска Юпитера  | 1 балл |
| 2. Вычисление периода Ганимеда  | 1 балл |
| 3. Определение дуги орбиты Ганимеда, на которой он покрывается Юпитером                     | 1 балл |
| 4. Определение времени покрытия   | 1 балл |
| 5. Указание на то, что Ганимед будет попадать в тень Юпитера                                | 1 балл |
| 6. Вычисление угла $\alpha$   | 1 балл |
| 7. Вывод о том, что после выхода из-за диска Юпитера до захода в тень есть период видимости | 1 балл |
| 8. Определение времени видимости перед заходом в тень                                       | 1 балл |
- Если участник забыл о существовании тени Юпитера, оценка за задачу не может превышать 4 баллов.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

### Задача 7

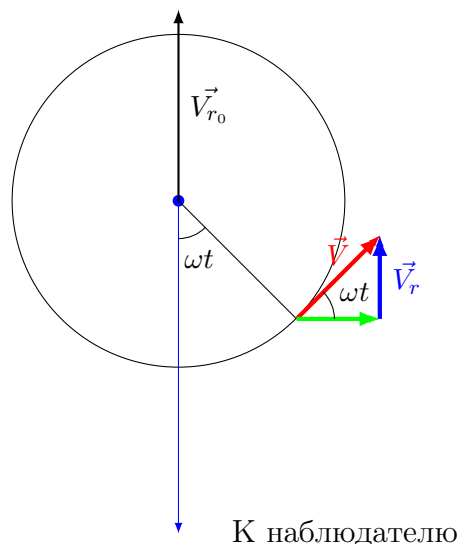
В таблице ниже приведена лучевая скорость звезды спектрального класса G2V в зависимости от времени, прошедшего с момента центрального прохождения планеты по диску звезды. Из наблюдений известно, что средняя лучевая скорость звезды составляет  $V_{r_0} = 46.5670 \pm 0.0003$  км/с, а период системы, с высокой точностью,  $T = 980.4$  дней, при этом планета в системе одна. Предполагая, что орбита планеты круговая, найдите её массу и оцените погрешность определения. Погрешность определения лучевой скорости в каждой отдельном измерении около 5 м/с.

$V_r$ , км/с	t, сут	$V_r$ , км/с	t, сут	$V_r$ , км/с	t, сут
46.574	57.071	46.579	95.124	46.579	112.289
46.578	65.781	46.573	55.459	46.580	120.981
46.578	86.014	46.575	76.865	46.581	122.354
46.581	94.097	46.582	110.396	46.585	134.461

**Решение.** К сожалению, в условие задачи закралась ошибка. Как совершенно правильно заметили некоторые участники, после прохождения планеты по диску звезды лучевая скорость звезды должна была не расти, а уменьшаться. Судя по решениям, одна часть участников вообще не заметила данной проблемы, другая заметила, но правильно определила смысл задачи и продолжила решение. Но оказалось значительное число участников, которые, столкнувшись с этой проблемой, не смогли её преодолеть. Поэтому мы исключили эту задачу из проверки. Ниже приводится решение в ознакомительных целях.

Вариации лучевой скорости звезды, которая, судя по спектральному классу, близка по своим параметрам к Солнцу, вызваны её движением относительно центра масс системы звезда-планета. Обратим внимание, что средняя лучевая скорость звезды, которая является лучевой скоростью центра масс этой системы, известна нам с точностью, существенно превышающей точность одного измерения. Моменты времени, в которые измерения были произведены, также, очевидно, можно считать определенными точно.

Поймём, каким образом лучевая скорость звезды в данной системе должна зависеть от времени. Для этого сделаем небольшой рисунок с учётом нулевого наклона орбиты звезды к лучу зрения (т. к. прохождения центральные):



Здесь  $t$  — время, прошедшее с момента центрального прохождения,  $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ . Из геометрии ясно, что  $V_r(t) = V_{r_0} + V \sin \omega t$ .

Иными словами, изменение лучевой скорости звезды относительно лучевой скорости центра масс системы линейно зависит от  $\sin \omega t$ , и, более того, зависимость прямо пропорциональная, а её коэффициент — скорость звезды  $V$ . Теперь наша цель — связать скорость  $V$  с массой планеты.

Для начала найдём скорость планеты. Целесообразно на этом этапе пренебречь массой планеты, поскольку, во-первых, точность определения относительной лучевой скорости невелика, а во-вторых, потому, что собственная неопределённость массы звезды, соответствующей данному спектральному классу, кратно превышает массу планеты. Запишем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2 M_\odot}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow a = \left( \frac{T^2 G M_\odot}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.930 \text{ а. е.}$$

Тогда скорость планеты  $V_p$ :

$$V_p = \sqrt{\frac{G M_\odot}{a}} \approx 21.47 \text{ км/с}$$

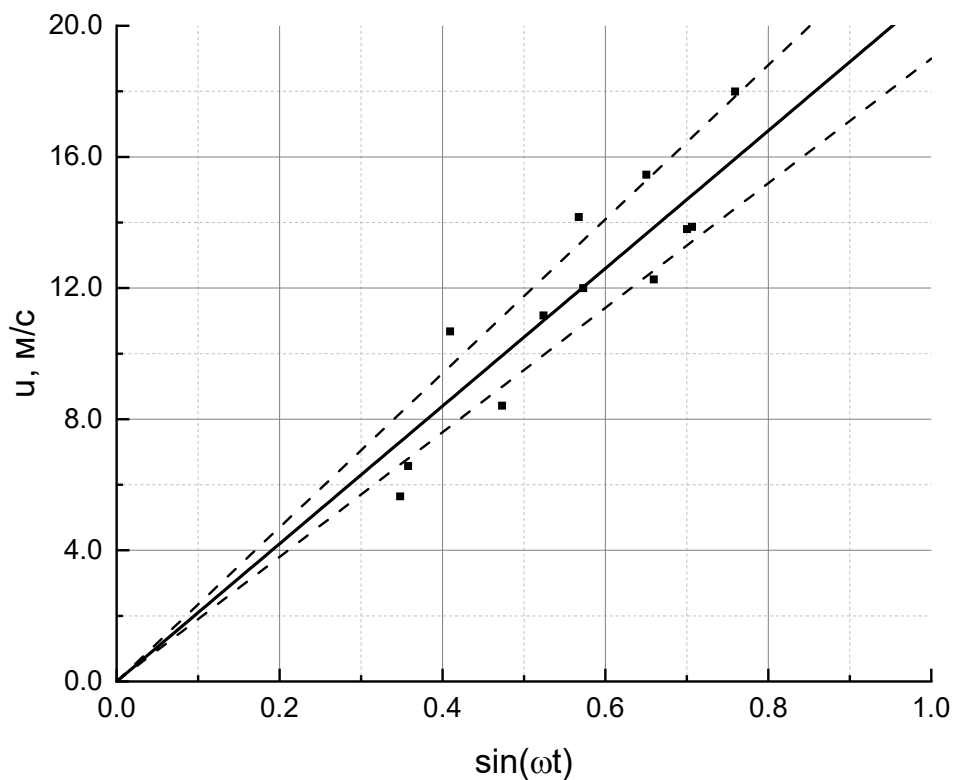
Масса планеты  $M_p$  может быть найдена из условия равенства импульсов планеты и звезды в системе отсчёта центра масс:

$$M_p V_p = M_\odot V \Rightarrow M_p = M_\odot \cdot \frac{V}{V_p}$$

Теперь найдём скорость звезды. Для этого рассчитаем для каждого из 12 данных нам измерений величину  $\sin \omega t$  и  $u = V_r - V_{r_0}$ , а затем построим график  $u(\sin \omega t)$ :

$u$ , м/с	$\sin \omega t$	$u$ , м/с	$\sin \omega t$	$u$ , м/с	$\sin \omega t$
6.58	0.3577	12.00	0.5726	12.27	0.6591
10.68	0.4092	5.65	0.3478	13.80	0.7000
11.17	0.5238	8.42	0.4729	13.87	0.7062
14.17	0.5672	15.46	0.6499	18.00	0.7590

При построении графика учтём, что с очень хорошей точностью прямая должна проходить через точку  $(0, 0)$ . Для определения погрешности определения  $V$  проведём две вспомогательные прямые, каждая из которых будет оставлять сверху и снизу соответственно треть, в нашем случае, 4 точки. Конечно, могут быть выбраны любые другие разумные критерии.



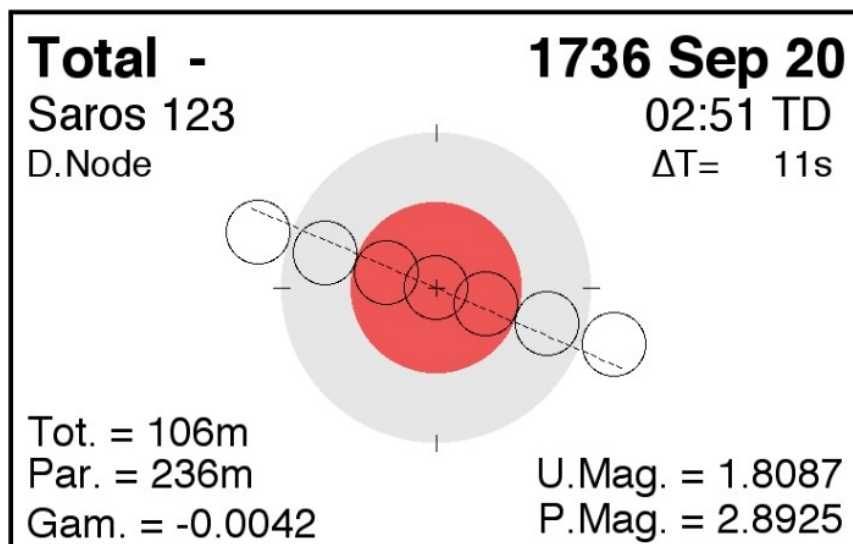
Из графика определим скорость  $V = 21.1 \pm 2.3$  м/с и наконец найдём массу планеты:

$$M_p = M_{\odot} \cdot \frac{V}{V_p} = (1.03 \pm 0.11) M_{\oplus}$$

Максимальная оценка за задачу **0 баллов**.

### Задача 8

Вам предоставлена схема лунного затмения 1736 года, которое произошло 20 сентября. Определите области на Земле, где было видно это затмение (хотя бы частные теневые фазы). Орбиту Луны считайте круговой. Наклоном лунной орбиты к эклиптике пренебrecь. Вблизи какого узла лунной орбиты произошло это затмение?



Пояснения к схеме:

1. На рисунке показаны земная тень и полутень, линия эклиптики (пунктир) и движение Луны через тень так, как оно видно наблюдателям с Земли. Север сверху.
2. Момент максимальной фазы затмения указан по земному динамическому времени. Оно практически совпадает со всемирным временем. Параметр  $\Delta T$  показывает разницу между этими временами.
3. Фактор  $\Gamma$  (Gam.) — расстояние центра диска Луны от центра тени Земли в единицах экваториального радиуса Земли. Он определяется в момент наибольшего затмения, когда его абсолютное значение минимально.
4. Tot. — продолжительность полной фазы затмения, Par. — продолжительность теневой и полутеневой фазы вместе.

**Решение.** На первом этапе решения задачи зафиксируем, что нам дано.

1. Дата 20.09 находится вблизи осеннего равноденствия. Для дальнейшего решения мы будем считать, что затмение происходит в момент равноденствия.
2. Фактор  $\Gamma$  почти равен нулю. Это значит, что затмение центральное.
3. Длительность всего затмения составляет 236 минут. А полной фазы — 106 минут.
4. Максимальная фаза затмения была в 02 : 51 по земному динамическому времени. При решении задачи будем считать, что в момент максимальной фазы всемирное время было равно  $2^{\text{h}}51^{\text{m}}$ .

На втором этапе решения задачи определим, как должны выглядеть области на поверхности Земли, где затмение видно.

В любой произвольный момент времени Луну видно с половины поверхности Земли. При солнечном затмении положение наблюдателя может поднять или опустить Луну относительно

Солнца. Для лунного затмения положение наблюдателя не важно. Если Луна попала в конус тени Земли, то для всех земных наблюдателей, для которых Луна находится над горизонтом, видно затмение. Лунное затмение — это длительное явление. Затмение 1736 года продолжалось почти 4 часа. Из-за вращения Земли вокруг своей оси, часть поверхности Земли повернётся к Луне, а на части поверхности Луна уйдёт за горизонт. Добавиться сферический сектор с углом  $\beta = \frac{236^m}{23^h56^m} \cdot 360^\circ \approx 59^\circ$ . Поэтому суммарная площадь будет больше 50%. Стоит отметить, что такая простая геометрическая модель возможна только в дни равноденствий, когда оба полюса Земли находятся на лимбе при наблюдения с Солнца или Луны.

На **третьем этапе** рассмотрим эффекты первого порядка, которые будут влиять на ответ.

Насколько корректно утверждать, что Луну в какой-то момент времени видно с половины земной поверхности, то есть с полусферы?

1. Из-за близкого расположения Луны к Земле область, где центр Луны может наблюдаться в какой-то момент времени, является полусферой за вычетом сферического слоя шириной, равной параллаксу Луны. Это примерно  $57'$ .
2. С другой стороны, есть атмосферная рефракция и ненулевой размер Луны. Это позволяет увидеть Луну в областях, где без учёта этих эффектов центр Луны был под горизонтом. Суммарная величина этих эффектов составляет  $35' + 16' = 51'$ .

Стоит обратить внимание, что первый эффект уменьшает область поверхности Земли, где затмение видно, а второй увеличивает. При этом численные значения их практически совпадают. Очевидно, что отличие от полусферы оказывается незначительным, и мы его учитывать не будем.

Для более точного определения доли поверхности Земли, где Луна взойдёт после начала частной фазы затмения, обратим внимание на то, что за время затмения Луна также смещается по небу вследствие орбитального движения вокруг Земли. Поэтому для корректной оценки размера угла сферического сектора нужно использовать период обращения Земли не вокруг своей оси, а относительно Луны. Можно воспользоваться средним значением, так как затмение происходит в день осеннего равноденствия, следовательно, Луна находится в точке весеннего равноденствия, то есть на небесном экваторе.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{23^h56^m} - \frac{1}{27.32^d} = \frac{1}{24^h50^m}.$$

Тогда угол сферического сектора  $\beta_1$  составляет:

$$\beta_1 = \frac{236^m}{24^h50^m} \cdot 360^\circ \approx 57^\circ.$$

К тому же ответу можно прийти и другими способами. Поскольку затмение длится 236 минут, а Луна совершает один оборот вокруг Земли относительно Солнца, а значит, и земной тени за 29.5 суток, за время затмения она преодолет  $\frac{236}{29.5 \cdot 24 \cdot 60} 360^\circ = 2^\circ$ . Поскольку Луна смещается на восток, жители самой западной части территории, где могло бы наблюдаться затмение без учёта движения Луны, затмения не увидят.

Те же  $2^\circ$  можно получить, просто обратив внимание на рисунок. Размер земной тени лишь немного меньше трёх диаметров Луны, то есть от начала до конца затмения Луне нужно пройти



чуть меньше четырёх своих диаметров. Поскольку диаметр диска Луны около  $0.5^\circ$ , получаем то же смещение, что и выше.

На **четвёртом этапе** привяжем нашу модель к конкретным географическим координатам.

Вначале разберёмся, что нам даёт дата 20 сентября или осеннее равноденствие. В эту дату оба полюса Земли находятся на лимбе при взгляде с Солнца или Луны. Следовательно, области видимости будут ограничены меридианами.

Теперь рассмотрим время. Единственная привязка, которая дана в условии, что максимальная фаза затмения произошла в  $02^{\text{h}}51^{\text{m}}$  по всемирному времени. Это означает, что Луна в этот момент кульминировала над меридианом  $42^\circ45'$  западной долготы. А подлунная точка в этот момент имела координаты  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 42^\circ45'$ .

Тогда в момент центрального затмения оно было видно на долготах  $[-132^\circ45'; 47^\circ15']$ . Знак минус означает западную долготу, знак плюс — восточную. В указанном диапазоне долгот затмение было видно на всех широтах.

Поскольку затмение длилось 236 минут, то начальные фазы затмения можно было увидеть в более восточных местах, смещённых относительно центрального момента затмения на угол  $\beta_1/2 \approx 28.5^\circ$ , а поздние стадии можно было увидеть западнее на такой же угол.

Тогда итоговый ответ задачи: затмение было видно на всех широтах, при диапазоне долгот  $[-161^\circ15'; 75^\circ45']$

Для визуализации предоставим реальные данные о областях видимости затмения 1736 года.

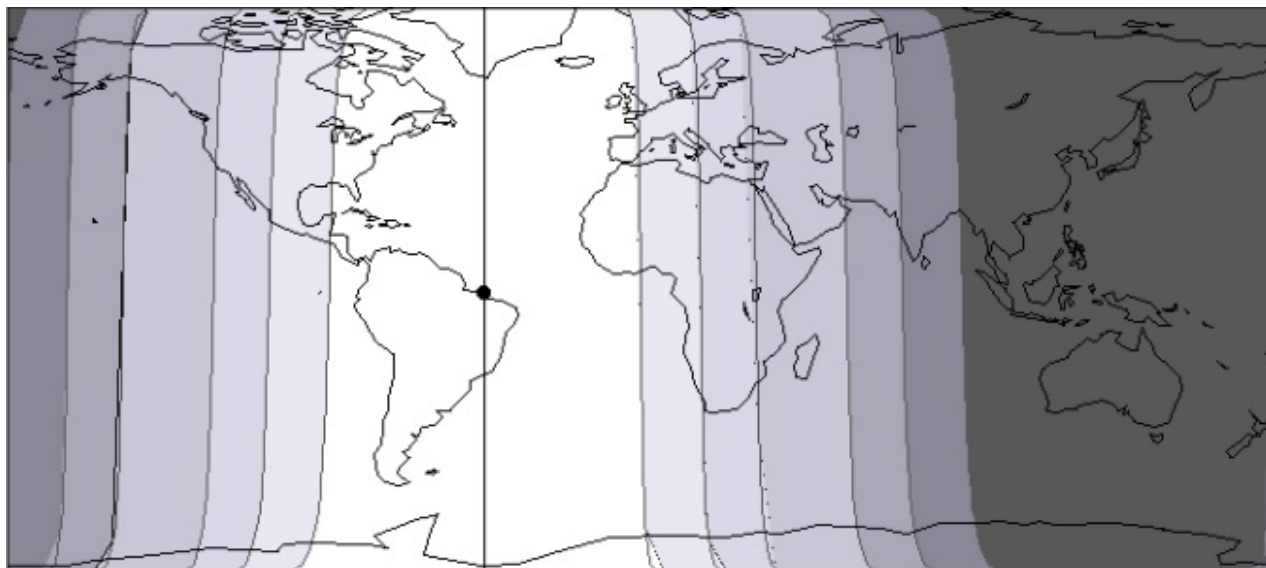


Рис. 1: Области видимости лунного затмения 1736 года

Как видно из схемы, практически все границы параллельны меридианам, отличие происходит из-за того, что затмение было не идеально в момент равноденствия.

Ответим на последний вопрос задачи. Движение Луны относительно звёзд, а также земной тени происходит с запада на восток. На рисунке это движение справа налево. Мы видим, что Луна пересекает эклиптику, двигаясь из северного полушария небесной сферы в южное. Значит, узел нисходящий.

### Критерии проверки

1. Затмение центральное 1 балл
2. Затмение происходит в день осеннего равноденствия 1 балл
3. Геометрическая модель решения задачи — две области на земной поверхности: полусфера и сферический сектор по 1 баллу
4. Анализ учёта горизонтального параллакса, рефракции и ненулевого размера Луны. Вывод о том, что суммарный эффект стремится к нулю и им можно пренебречь 1 балл  
Если эти эффекты не рассматривались вообще, то оценка за этот пункт не ставится.
5. Учёт движения Луны по небу за время затмения и определение этой поправки 1 балл
6. Привязка земных координат через всемирное время в максимальной фазе затмения 2 балла  
Оценивается полностью, если решение было сделано корректно и были найдены координаты подлунной точки. В случае численной ошибки с координатами или с полушарием этот пункт не оценивается, а последующие пункты оцениваются, исходя из тех координат подлунной точки, что получил участник.
7. Определение долгот в моменты начала или конца затмений 2 балла  
Если не учтено движение Луны (этап 5), то за этот этап оценка — не более 1 балла.
8. Явное указание того, что затмения наблюдаются на всех широтах 1 балл
9. Правильный узел орбиты только при наличии корректного объяснения 1 балл

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

*(В. Б. Игнатьев)*

## Справочные данные

### Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\text{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8 \text{ Вт м}^{-2}$
Поток солнечной энергии в видимых лучах на расстоянии Земли	$= 600 \text{ Вт м}^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут}$
Звёздные сутки	$= 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21.45''$
Синодический месяц	$S_{\zeta} = 29.53059 \text{ сут}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20 \text{ кпк}$
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

### Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг с}^{-3} \text{ К}^{-4}$
Постоянная Планка	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
Время накопления сигнала глазом	$= 0.05 \text{ с}$

### Формулы приближённого вычисления (при $x \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx x & \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} & \operatorname{tg} x &\approx x \\ \ln(1+x) &\approx x & e^x &\approx 1+x & (1+x)^\alpha &\approx 1+\alpha x \end{aligned}$$

### Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевой период
Солнце				$1.989 \times 10^{30}$	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	$3.302 \times 10^{23}$	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	$4.869 \times 10^{24}$	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	$5.974 \times 10^{24}$	6.37	23.93 ч
Луна	0.00257	0.0549	27.322 сут	$7.348 \times 10^{22}$	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	$6.419 \times 10^{23}$	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	$1.899 \times 10^{27}$	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	$5.685 \times 10^{26}$	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	$8.683 \times 10^{25}$	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	$1.024 \times 10^{26}$	24.7	16.11 ч